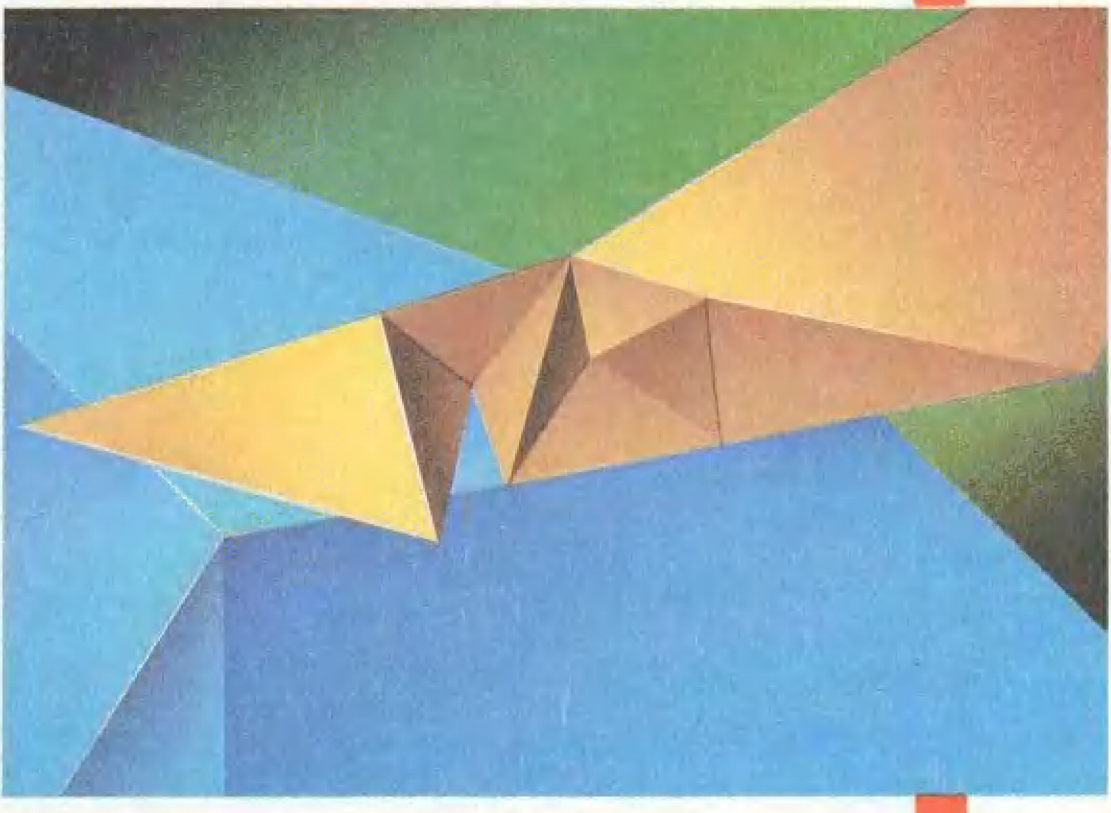
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 **11** 12



Можно ли из тетраэдра сделать куб?

1990

Квант

11 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

МОЖНО ЛИ ИЗ ТЕТРАЭДРА СДЕЛАТЬ КУБ?

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС

Многие математические работы трудны для школьников по чисто техническим причинам: для их понимания нужно знать те или иные вещи. Трудности, с которыми столкнется школьник при чтении этой статьи, иного рода: сам стиль работы покажется ему необычным. Содержательный математический результат получится в результате педантичного продумывания вещей, в которых, на первый взгляд, ничего неясного нет. Этот стиль характерен для значительной части математики XX века, и с ним стоит познакомиться.

Проблемы Гильберта

В последнем году XIX века довольно молодой, но уже весьма знаменитый немецкий математик Давид Гильберт выступал с докладом на очередном (втором) всемирном математическом съезде, который в том году состоялся в Париже. Доклад был необычен по форме. Он не включал в себя новых теорем, не предлагал решений никаких проблем. Напротив, он содержал формулировки двадцати трех проблем, решение которых, по замыслу докладчика, должно было стать главным стимулом развития математики в новом, XX столетии. И оно им стало. Проблемы Гильберта стали самыми престижными математическими задачами; как правило, решение проблемы Гильберта приводило к созданию новой области математики, и из возникших таким образом областей современная математика в значительной мере и состоит. В этом можно убедиться, просмотрев впечатляющий двухтомник «Развитие математики, выросшее из проблем Гильберта», выпущенный в 1976 году Американским математическим обществом.

Не все проблемы Гильберта оригинальны. Так, первая проблема — это «континуум-проблема» (существует ли множество мощности, промежуточной между счетной и континуальной?), принадлежащая Георгу Кантору и датируемая 1878 годом. Проблемы Гильберта относятся к совершенно разным математическим дисциплинам, но имеют общее: они конкретны, как правило, в каждой содержится вопрос, на который можно ответить «да» или «нет». Например: «Трансцендентно ли число $2^{\sqrt{2}}$?» (7-я проблема) или «Может ли уравнение 6-й степени задавать на плоскости кривую, состоящую из 11 овалов, лежащих вне друг друга?» (половина 16-й проблемы) и т. п.

Почти все проблемы Гильберта в настоящее время решены, хотя кое-что не сделано. (Например, не получил ответа конкретный вопрос о решениях уравнений 7-й степени, входящий в состав 13-й проблемы; впрочем, в некоем теоретическом смысле 13-я проблема Гильберта решена в студенческой работе В. И. Арнольда.)

Разные проблемы Гильберта потребовали для своего решения разного времени. Так, «континуум-проблема» была (в известном смысле) решена П. Коэном в 1963 году, 7-я проблема — А. О. Гельфондом в 1934 году, упоминавшаяся выше часть 16-й проблемы — Д. А. Гудковым в 1969 году. Но какая же из проблем Гильберта была решена раньше всех? Раньше всех была решена единственная из проблем Гильберта, относящаяся к классической геометрии — 3-я проблема, в которой идет речь о равносоставленности многогранников. Ее решил немецкий математик Макс Ден (драматическая биография этого замечательного ученого изложена в статье С. Табачникова «Нацизм и математика» в 10-м номере «Кванта» за 1990 год). Работа Дена появилась *настолько быстро*, что *упоминание* о ней имеется в английском переводе доклада Гильберта, опубликованном в Бюллетене Американского математического общества вскоре после парижского конгресса: на решение проблемы потребовалось меньше времени, чем на перевод ее (и других проблем) формулировки на английский язык!

В чем проблема?

Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на (многогранные) части, из которых можно составить другой. Понятие равносоставленности можно трактовать расширительно (и мы будем это делать): многогранники S' и S'' называются равносоставленными, если существуют многогранники $P_1, \ldots, P_n$ со следующим *свойством: многогранники* $S', P_1, \ldots, P_n$ можно разрезать на многогранные части, из которых можно составить многогранники $S'', P_1, \ldots, P_n$.

Очевидно, что равносоставленные многогранники имеют одинаковые объемы. 3-я проблема Гильберта спрашивает, *верно ли обратное, т. е. верно ли, что любые два многогранника одинаковых объемов равносоставленны.*

Ден показал, и мы познакомимся здесь с его доказательством, что это *неверно,* т. е. *что многогранники* одинаковых объемов могут быть (и в действительности, как правило, являются) не равносоставленными.

Надо сказать, что 3-я проблема Гильберта имеет конкретную формулировку: речь в ней идет не о произвольной паре многогранников одинакового объема, а о двух треугольных пирамидах с одинаковыми (по форме и размерам) основаниями и равными (по длинам) высотами. Можно показать, однако, что если бы такие пирамиды были всегда равносоставленны, то были бы равносоставленны любые два многогранника одинаковых объемов (см. ниже упражнение 1). Ввиду этого для опровержения гипотезы Гильберта достаточно установить неравносоставленность любых двух многогранников с одинаковыми объемами. И мы в качестве такой пары будем рассматривать куб и правильный тетраэдр.

Доклад Гильберта содержит краткое указание на источник проблемы: она естественно возникает при продумывании понятия объема. Предположим, что объем некоторой фигуры, пусть многогранника, равен a кубическим единицам. По определению, это означает, что наш многогранник имеет такой же объем, как брус $1 \times 1 \times a$. А это что значит? Напрашивается определение: многогранники имеют одинаковые объемы, если они равносоставленны (тем более, что для площадей многоугольников, как мы увидим, такое определение вполне подходит). Однако неудобство такого определения испытал на себе уже Архимед при *доказательстве известной вам формулы* $\frac{1}{3}Sh$ для объема пирамиды. Поскольку равносоставленность пирамиды и бруса доказать не удалось (а мы увидим, что она и не имеет места), Архимеду пришлось прибегнуть к другой аргументации. Говоря современным языком, он показал, что при любом $\varepsilon > 0$ можно вписать в пирамиду многогранник объемом больше $\frac{1}{3}Sh - \varepsilon$ и описать вокруг нее многогранник

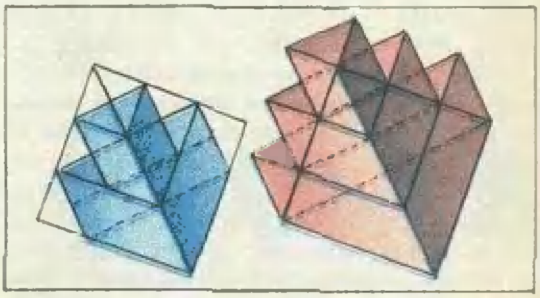


Рис. 1.

объемом меньше $\frac{1}{3}Sh+\varepsilon$ (конструкция «чертовой лестницы» — рис. 1). Значит, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Это рассуждение ничем не плохо, но создает трудности при составлении системы аксиом стереометрии. Мотивировкой проблемы Гильберта было желание узнать, происходят ли эти трудности из существа дела или их можно избежать. Ответ Дена был категоричен: избежать нельзя.

А на плоскости?

На плоскости все в порядке: любые два многоугольника одинаковой площади можно разрезать на одинаковые части. Кстати сказать, в популярной литературе нет-нет, да и мелькнет задача: разрезать такую-то фигуру (многоугольник) на части, из которых можно сложить, скажем, квадрат. Читателю будет небезынтересно узнать, что это можно сделать всегда (хотя задачи указанного вида не всегда бессмысленны, поскольку в них иногда подразумевается существование какого-нибудь особенно красивого разрезания).

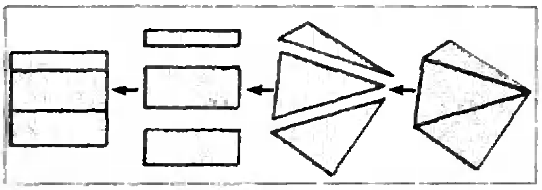


Рис. 2.

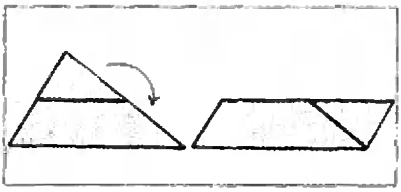


Рис. 3.

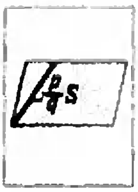


Рис. 4.

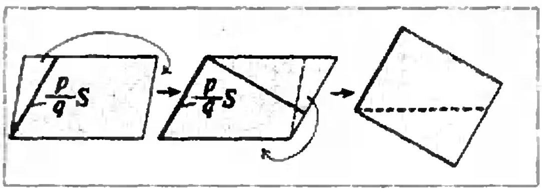


Рис. 5.

Теорема 1. *Многоугольник площадью S всегда можно разрезать на многоугольные части, из которых можно составить прямоугольник $1\times S$.*

Доказательство. Всякий многоугольник можно разрезать на треугольники, поэтому можно ограничиться случаем, когда наш многоугольник есть треугольник (многоугольник разрезается на треугольники площадей $S_1, ..., S_m$, эти треугольники разрезаются на части, из которых составляются прямоугольники $1\times S_1, ..., 1\times S_m$, из этих прямоугольников составляется прямоугольник $1\times S$ — рис. 2). Треугольник разрезается на части, из которых составляется параллелограмм (рис. 3), в параллелограмме можно провести отрезок, соединяющий вершину с точкой одной из противоположных сторон, длина которого соизмерима с S, т. е. равна $\frac{p}{q}S$, где p и q — целые (рис. 4). Затем разрезанием и перестановкой частей мы превращаем наш параллелограмм в параллелограмм, а потом и в прямоугольник со стороной $\frac{p}{q}S$ (рис. 5). Этот прямоугольник можно разрезать на p полосок со стороной $\frac{1}{q}S$, затем из этих полосок мы составляем длинную полосу, которую делим поперечными разрезами на q одинаковых частей, из которых, наконец, составляется полоса шириной S (рис. 6). Длина этой полосы равна 1, потому что ее площадь равна S. Построение закончено.

Упражнение 1. Докажите, что если бы было верно, что треугольные пирамиды с одинаковыми основаниями и равными высотами равносоставленны, то было бы верно и что любые два многогранника одинаковых объемов равносоставленны.

Теорема Дена: как подступиться к ней?

Мы уже вернулись к пространственной ситуации (упражнение 1). Пусть теперь у нас есть куб и правильный тетраэдр того же объема. Как доказать, что эти многогранники неравносоставленны, т. е. один

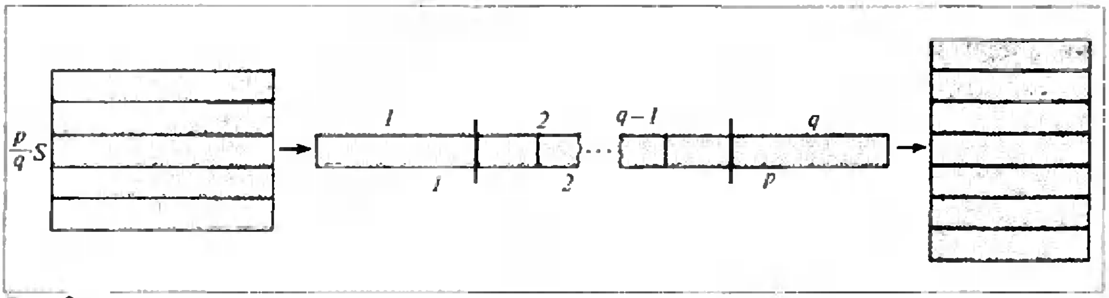


Рис. 6.

нельзя получить из другого посредством разрезания, склеивания частей и, возможно, приставления каких-то посторонних частей с последующим отрезанием таких же? При первом взгляде на проблему устрашает немыслимое разнообразие возможностей. Как обозреть все, во что можно превратить куб или тетраэдр такими операциями? Опытный математик, однако, знает, что для решения проблемы нужно выдумать способ поставить в соответствие всякому многограннику НЕЧТО, так, чтобы это НЕЧТО не менялось при всех перечисленных операциях над многогранниками (как объем) и чтобы у куба оно было одно, а у тетраэдра — другое (не как объем). Как это сделать — вопрос другой, но, сделав это, мы сможем в геометрическое разнообразие многогранников, равносоставленных с тетраэдром и кубом, не вникать. «Неизменный» по-латыни — «инвариантный», поэтому наше НЕЧТО называют *инвариантом*.

Решение нашей задачи при помощи инвариантов разделяется на следующие этапы. Нужно:

(а) договориться, чем будет наш инвариант — числом, фигурой или чем еще (в нашем случае — «чем еще»);

(б) описать способ сопоставления инварианта с многогранником (в нашем случае это будет совсем просто);

(в) убедиться в том, что это — действительно инвариант, т. е. не меняется при наших преобразованиях (в нашем случае и это не особенно сложно);

(г) вычислить инвариант для куба и тетраэдра (это займет у нас одну секунду);

(д) доказать, что получающиеся инварианты различны (это покажется нам очевидным, но строгое доказательство потребует-таки возни).

Итак, приступаем.

Инвариант Дена

Пусть S — многогранник, имеющий N ребер. Пусть $l_1, \ldots, l_N$ — длины этих ребер, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ — величины соответствующих двугранных углов, измеренные в радианах. Сопоставим с нашим многогранником набор пар $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_N, \varphi_N)$. В каждой паре стоит на первом месте (положительное, но это не особенно важно для нас) действительное число, на втором месте — действительное число, заключенное между 0 и 2π (поскольку многогранник не предполагается выпуклым, углы, в принципе, могут быть и больше π. Нам удобнее считать, что на втором месте стоит действительное число, определенное с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, $k \in Z$. Этот набор и будет нашим инвариантом, только мы сначала примем соглашение, которое иногда позволит нам считать одинаковыми наборы, составленные из разных пар.

Итак, слово *набор* будет обозначать у нас конечный набор пар, в которых на первом месте стоит действительное число (любое), на втором — действительное число, определенное с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, $k \in Z$. Подчеркнем, что говоря «набор», мы не обязательно имеем в виду набор, получающийся из многогранника; например, набор может быть пустым ($N=0$).

Мы будем разрешать производить следующие преобразования наборов:

(1) любую пару (l, φ) можно заменить двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l'+l''=l$;

(2) наоборот, если набор содержит пары (l', φ), (l'', φ) с одинаковыми вторыми членами (напомним, что одинаковость вторых членов понимается с точностью до слагаемого $2k\pi$), то можно заменить их одной парой (l, φ), где $l'+l''=l$;

(3) любую пару (l, φ) можно заменить двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi'+\varphi''=\varphi$ (и это равенство понимается «по модулю 2π», т. е. его левая и правая части могут различаться на слагаемое вида $2k\pi$);

(4) наоборот, если набор содержит пары (l, φ'), (l, φ'') с одинаковыми первыми членами, то их можно заменить одной парой (l, φ) с $\varphi=\varphi'+\varphi''$;

(5) пару (l, φ), в которой $l=0$ или $\varphi=0$, можно просто выбросить из набора.

Если два набора таковы, что один можно получить из другого последовательным применением нескольких допустимых операций, то мы будем говорить, что эти наборы *эквивалентны*, или *подобны*.

Итак, *инвариантом Дена многогранника S, по определению, является описанный выше набор $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_n, \varphi_N)$, рассматриваемый с точностью до подобия.*

Мы докажем две вещи:

Теорема 2. *Если два многогранника равносоставленны, то их инварианты Дена одинаковы (т. е. соответствующие им наборы подобны).*

Теорема 3. *Инварианты Дена куба и правильного тетраэдра различны (т. е. соответствующие им наборы не подобны).*

Из этих двух теорем вытекает.

Теорема Дена. *Куб и правильный тетраэдр не равносоставленны.*

(Заметим, что теорема 3 справедлива независимо от того, равны или не равны объемы куба и тетраэдра, хотя для нас важен только случай равных объемов.)

Прежде чем доказывать теоремы, мы сформулируем две леммы о наборах; первую из этих лемм мы тут же и докажем, о второй — разговор особый.

Кое-что о подобии наборов

Лемма 1. *Если число φ соизмеримо с π, то при любом l пару (l, φ) можно выбросить из любого набора, и новый набор будет подобен исходному.*

Лемма 2. *Если $l\neq 0$ и φ не соизмеримо с π, то набор, состоящий из одной пары (l, φ), не подобен пустому набору.*

Доказательство леммы 1. Пусть $\varphi=\frac{p}{q}\pi$. Пару $(l, \varphi)=(l, \frac{p}{q}\pi)$ можно заменить набором из $2q$ пар $(\frac{1}{2q}l, \varphi)$ (потому что $l=\frac{1}{2q}l+\ldots+\frac{1}{2q}l$, $2q$ слагаемых), а эти $2q$ пар можно заменить одной парой $(\frac{1}{2q}l, 2q\varphi)$ (потому что $\varphi+\ldots+\varphi=2q\varphi$, $2q$ слагаемых). Но $2q\varphi=2q\cdot\frac{p}{q}\pi=2p\pi$, а по нашим правилам вместо $2p\pi$ можно написать 0. Пара же $(\frac{1}{2q}l, 0)$ может быть исключена из набора. Лемма доказана.

Лемма 2 могла бы показаться очевидной, но в ее доказательстве есть тонкость, и мы отложим его на потом. Мы докажем лемму 2 после того, как расскажем доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2

Хотя теорема 2, в действительности, почти очевидна, доказывать ее тоже приходится довольно долго. Может быть, читателю лучше не читать этого доказательства, а самому перебрать все возможности и посмотреть, что происходит с ребрами и двугранными углами при разрезаниях и составлениях многогранников. Мое дело, однако, не жаловаться, а писать, и я приступаю к доказательству теоремы 2.

Заметим, что если многогранник состоит из отдельных, не соединенных между собой кусков (скажем,

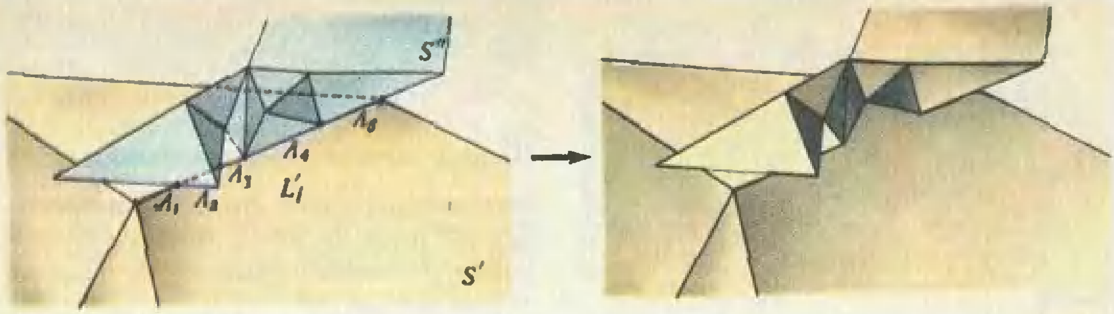


Рис. 7.

из куба и лежащего отдельно от него тетраэдра), то набор (инвариант Дена) этого многогранника есть объединение наборов, отвечающих частям. Для доказательства теоремы 2 нам достаточно установить, что если многогранник S получается посредством приставления друг к другу многогранников S' и S'', то инвариант Дена многогранника S равен инварианту Дена многогранника, составленного из S' и S'' как из отдельных частей. При этом многогранники S' и S'' приставляются друг к другу по одной или нескольким граням или их частям. (Наряду с составлением многогранников мы должны были бы рассматривать их разрезание, но эти операции взаимно обратны, поэтому если одна не меняет инварианта Дена, то и другая его не меняет.)

Пусть $L'_1, ..., L'_N$ — ребра многогранника S', $L''_1, ..., L''_M$ — ребра многогранника S''. Каждое ребро L'_i при склеивании многогранников подразделяется на части; частями служат пересечения ребра L'_i с гранями и ребрами многогранника S'' (одноточечные пересечения мы во внимание не принимаем) и куски ребра L'_i, не соприкасающиеся с S''. Иллюстрацией является рисунок 7, на котором ребро L'_i разрезается таким образом на 5 частей: $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$. При этом часть Λ_2 совпадает с отрезком грани многогранника S'' (синий многогранник), часть Λ_4 — с ребром и часть Λ_5 — с отрезком ребра многогранника S''. Таким образом, мы подразделяем каждое ребро каждого из многогранников S' и S''. Соответствующим образом мы преобразуем и наборы Дена: вместо (l'_i, φ) мы пишем (λ_1, φ), (λ_2, φ), (λ_3, φ), (λ_4, φ), (λ_5, φ) (здесь l'_i — длина ребра L'_i, а $\lambda_1, ..., \lambda_5$ — длины ребер $\Lambda_1, ..., \Lambda_5$). Такое преобразование наборов является допустимым.

Пусть $\Lambda'_1, ..., \Lambda'_P$ и $\Lambda''_1, ..., \Lambda''_Q$ — куски ребер многогранников S' и S'', получающиеся при разбиении. Пусть, далее, $\lambda'_1, ..., \lambda'_P$ и $\lambda''_1, ..., \lambda''_Q$ — длины этих кусков и $\varphi'_1, ..., \varphi'_P$ и $\varphi''_1, ..., \varphi''_Q$ — соответствующие двугранные углы. Набор Дена многогранника S' подобен набору $(\lambda'_1, \varphi'_1), ..., (\lambda'_P, \varphi'_P)$, а набор Дена многогранника S'' подобен набору $(\lambda''_1, \varphi''_1), ..., (\lambda''_Q, \varphi''_Q)$. При составлении многогранников с каждым из наших кусков ребер может произойти следующее:

(1) Кусок Λ'_i или Λ''_j не соприкасается, соответственно, с S'' или с S' (как Λ_1 или Λ_3 на рисунке 7). Тогда соответствующая пара входит в набор S с тем же углом, с которым она входила в набор S' или набор S''.

(2) Кусок Λ'_i совмещается с куском Λ''_j и сумма углов φ'_i и φ''_j не равна π или 2π (Λ_5 на рисунке 7). Тогда $\lambda'_i = \lambda''_j$ и в S есть ребро той же длины с двугранным углом $\varphi = \varphi'_i + \varphi''_j$. Таким образом, в набор Дена объединения многогранников S' и S'' входят пары (λ'_i, φ'_i), $(\lambda''_j, \varphi''_j)$, а в набор Дена многогранника S вместо них входит пара (λ'_i, φ), что есть то же самое с точки зрения инварианта Дена.

(3) То же, но $\varphi'_i + \varphi''_j = \pi$ или 2π (случай π представлен на рисунке 7 отрезком Λ_4, случай 2π показан на рисунке 8). Тогда при слиянии многогранников ребра Λ'_i и Λ''_j исчезают: они превращаются либо в отрезок грани многогранника S, либо в отре-

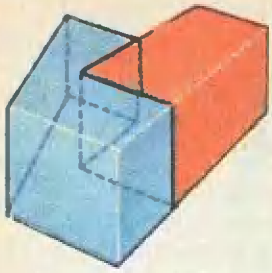


Рис. 8.

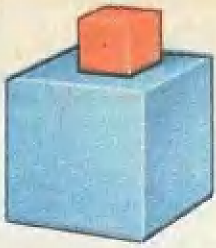


Рис. 9.

зок, лежащий внутри многогранника S. Но и пары (λ_i', φ_i'), $(\lambda_i'', \varphi_i'')$ вместе эквивалентны паре (λ_i', π или 2π), которая может быть выброшена из набора (лемма 1).

(4) Наконец, кусок Λ_i' или Λ_i'' может совместиться с отрезком грани многогранника S'' или S' (рис. 9). Тогда этот кусок станет ребром в S, а к двугранному углу прибавится π, что опять-таки не скажется на инварианте Дена: пара $(\lambda, \varphi+\pi)$ эквивалентна двум парам (λ, φ), (λ, π), вторая из которых может быть отброшена *в силу леммы 1.*

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3

У куба 12 ребер одинаковой длины, скажем, a, с двугранными углами $\frac{\pi}{2}$. Пара $(a, \frac{\pi}{2})$ может быть выброшена из набора согласно лемме 1. Таким образом, набор Дена куба подобен пустому набору.

Упражнение 2. Докажите, что у любой призмы набор Дена подобен пустому набору.

Упражнение 3. Докажите, что любая призма равносоставленна с кубом (см. раздел «Обратная теорема») в конце статьи.

У правильного тетраэдра 6 ребер одинаковой длины, скажем, b, двугранные углы при них равны $\arccos\frac{1}{3}$. Набор, отвечающий тетраэдру, состоит из 6 пар $(b, \arccos\frac{1}{3})$; он подобен набору, состоящему из одной пары $(6b, \arccos\frac{1}{3})$. Так как $\arccos\frac{1}{3}$ не соизмерим с π, то последний набор не подобен пустому набору (лемма 2). Теорема 3 доказана. Осталось доказать лемму 2.

Но, впрочем,

Почему $\arccos\frac{1}{3}$ не соизмерим с π?

Этот вопрос тоже может возникнуть. Самый простой ответ таков: если бы косинус какого-нибудь угла $\frac{p}{q}\pi$ равнялся бы $\frac{1}{3}$, то мы об этом, уж наверное, знали бы.

А если серьезно? А если серьезно, то имеет место такая теорема, она вполне интересна сама по себе:

Теорема 4. *Если угол φ соизмерим с π и его косинус рационален, то $\cos\varphi=0, \pm 1$ или $\pm\frac{1}{2}$ (а уж не $\frac{1}{3}$).*

Доказательство. Если угол φ соизмерим с π, то в последовательности

$$\varphi,\ 2\varphi,\ 4\varphi,\ 8\varphi,\ 16\varphi, \ldots$$

непременно есть повторяющиеся углы (действительно, если $\varphi=\frac{p}{q}\pi$, то все члены этой последовательности имеют вид $\frac{r}{q}\pi$ с $r=0, 1, \ldots, 2q-1$, т. е. для членов этой бесконечной последовательности вообще есть конечное число возможностей). Рассмотрим последовательность

$$\cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \cos 4\varphi, \ldots$$

Если число $\cos\varphi$ рационально, то и все члены этой последовательности рациональны: $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$, $\cos 4\varphi=2\cos^2 2\varphi-1$, ... Более того, эти же формулы показывают, что если $\cos 2^m\varphi$ есть несократимая дробь $\frac{s}{t}$ со знаменателем t, то $\cos 2^{m+1}\varphi$ есть несократимая дробь со знаменателем t^2 (или $t^2/2$):

$$\cos 2^{m+1}\varphi=\frac{2s^2}{t^2}-1=\frac{2s^2-t^2}{t^2},$$

а $2s^2-t^2$ и t^2 не могут иметь общего множителя, большего 2. Следовательно если знаменатель несократимой дроби $\cos\varphi$ превосходит 2, то знаменатели несократимых дробей

$\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, ... составляют строго возрастающую последовательность, и среди ее членов не может быть попарно равных. Значит, знаменатель дроби $\cos\varphi$ не может быть больше 2. Теорема доказана.

Упражнение 4. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых тангенс рационален.

Упражнение 5. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых а) косинус, б) тангенс имеет вид $r_1\sqrt{r_2}$, где r_1 и r_2 — рациональные числа.

Приступаем к доказательству леммы 2. Аддитивные функции

Отвлечемся от геометрии и рассмотрим следующую задачу. Функция f, *определенная на множестве* R всех действительных чисел и принимающая действительные значения, называется *аддитивной*, если для любых $\alpha, \beta \in R$

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta).$$

Как перебрать все аддитивные функции?

Простейший пример аддитивной функции — линейная фунция (рис. 10):

$$f(x)=\lambda x, \text{ где } \lambda\in R.$$

Есть ли другие аддитивные функции? Я гарантирую вам, что попытка ответить на этот вопрос заведет вас в тупик. С одной стороны, вы не сможете построить такой функции, с другой — вы не сможете доказать, что ее нет.

Во всяком случае, аддитивная функция, не являющаяся линейной, не может быть непрерывной. Действительно, если f — аддитивная функция, то для любого действительного числа α и любого *рационального* числа r

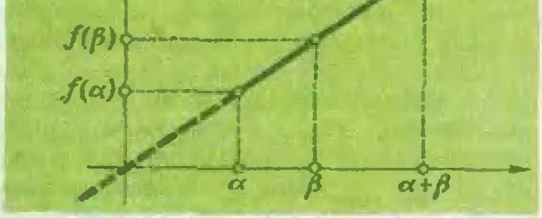


Рис. 10.

$$f(r\alpha)=rf(\alpha);$$

в самом деле, если $r=\frac{p}{q}$, то

$$qf(r\alpha)=\underbrace{f(r\alpha)+\ldots+f(r\alpha)}_{q}=$$

$$=f(\underbrace{r\alpha+\ldots+r\alpha}_{q})=f(qr\alpha)=f(p\alpha)=$$

$$=f(\underbrace{\alpha+\ldots+\alpha}_{p})=\underbrace{f(\alpha)+\ldots+f(\alpha)}_{p}=pf(\alpha),$$

откуда $f(r\alpha)=\frac{p}{q}f(\alpha)=rf(\alpha)$. Положим $f(1)=\lambda$; тогда $f(x)=xf(1)=\lambda x$ для любого рационального x, а если функция f непрерывна, то это равенство справедливо и для любого действительного x.

Упражнение 6. Докажите, что если аддитивная функция непрерывна хотя бы в одной точке, то она линейна.

Нелинейные аддитивные функции — это один из математических монстров, обитающих на периферии познания. Их существование не противоречит никаким математическим *аксиомам*, как, впрочем, и их несуществование. Таким образом, ответ на рассматриваемый нами вопрос зависит от нюансов аксиоматики.

Мне не хочется (да и страшновато) углубляться в этот предмет. Скажу лишь, что есть течение в математике, приверженцы которого признают существующими только объекты (числа, фигуры, функции, множества и т. д.), которые можно явно построить. Это течение называется «конструктивная математика». В рамках конструктивной математики нелинейных аддитивных функций не существует. С чисто эстетической точки зрения конструктивная математика выглядит очень привлекательной, но за эту привлекательность приходится платить значительным усложнением формулировок и доказательств многих фундаментальных теорем. Чаще математики принимают какую-нибудь аксиому, *разрушающую* конструктивность (это можно сделать многими эквивалентными способами). Ни на каких содержательных утверждениях это не сказывается. В неконструктивной математике справедливо, в частности, следующее утверждение.

«Теорема». *Существуют нелинейные аддитивные функции. Более того, для любого иррационального α существует аддитивная функция f такая, что $f(1)=0$, а $f(\alpha)=1$.*

(Если бы функция f была линейна, то из $f(1)=0$ следовало бы, что $f\equiv 0$.)

Доказывать «теорему» мы, конечно, не будем (да и не смогли бы). Впрочем, она нам и не нужна, как мы в конце концов увидим. А чтобы закончить этот разговор, мы приведем еще две формулировки утверждений, характерных для неконструктивной математики. Из каждого из них можно вывести нашу «теорему».

В множестве действительных чисел существует такое подмножество A, что всякое действительное число единственным образом представляется в виде конечной суммы.

$$r_1a_1+\ldots+r_na_n,$$

где r_1, ..., r_n — рациональные числа, а a_1, ..., $a_n\in A$.

Множество действительных чисел может быть вполне упорядочено; это значит, что в $\mathbf{R}$ можно ввести порядок $\prec$, по отношению к которому в любом множестве $B\subset\mathbf{R}$ есть минимальный элемент, т. е. такой элемент b, что $b\prec b'$ для всякого $b'\in B$, отличного от b. (Обычный порядок $<$ не годится: например, в множестве положительных чисел нет минимального элемента.)

Последнее утверждение часто и принимается в качестве дополнительной аксиомы (в форме *«всякое множество может быть вполне упорядочено»*).

Не очень хорошее доказательство леммы 2

С помощью «теоремы» наша лемма 2 доказывается в две секунды. Вот доказательство. Пусть (l, φ) — набор с $l\neq 0$ и с φ, не соизмеримым с π. Выберем аддитивную функцию f, такую, что $f(1)=0$ и $f(\varphi/2\pi)=1$. Поставим в соответствие всякому набору (l_1, φ_1), ..., (l_N, φ_N) число $l_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+l_Nf(\varphi_N/2\pi)$. Это число не меняется при преобразованиях (1) — (5) из определения подобия наборов (очевидную проверку я оставляю читателю). Таким образом, у подобных наборов эти числа одинаковы. Но у набора (l, φ) то число равно $lf(\varphi/2\pi)=l\neq 0$, а у пустого набора оно равно 0 (сумма нуля слагаемых). Лемма доказана.

Вполне хорошее доказательство леммы 2

Я сказал, что в своей содержательной части конструктивная математика не отличается от обычной. А лемма 2 — содержательное утверждение (во всяком случае, такова теорема Дена). Значит, ее можно доказать и без «теоремы»? Можно, вот доказательство.

Пусть наш набор (l, φ) подобен пустому набору. Значит, от (l, φ) можно перейти к пустому набору, какое-то количество раз применив преобразования (1) — (5). На каждом шаге получается какой-то набор. Выпишем на бумажку из всех пар, входящих во все эти наборы, вторые числа (углы). На бумажке появится конечный список чисел, в числе которых будет наше φ. Добавим к этому списку 2π и запишем получившиеся числа в таком порядке: сначала 2π, потом φ, а дальше — как угодно:

$$2\pi,\ \varphi,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \ldots,\ \varphi_{M-1},\ \varphi_M$$

(вместо 2π и φ мы будем иногда писать для единообразия φ_1 и φ_2). Теперь подчеркнем в списке те числа, которые не представляются в виде суммы предыдущих с рациональными коэффициентами. Поясняю: 2π мы подчеркнем (предыдущих чисел вовсе нет); φ мы тоже подчеркнем, потому что φ не представляется в виде $r\cdot 2\pi$ с рациональным r. Далее, если φ_3 представляется в виде $r_1\cdot 2\pi+r_2\varphi$ с рациональными r_1 и r_2, то мы φ_3 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. Аналогично, если φ_4 представляется в виде $r_1\cdot 2\pi+r_2\varphi+r_3\varphi_3$ с рациональными r_1, r_2 и r_3, то мы φ_4 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. И так далее, до φ_M. Может получиться, скажем, такое:

$$\underline{2\pi},\ \underline{\varphi},\ \varphi_3,\ \underline{\varphi_4},\ \ldots,\ \varphi_{M-1},\ \underline{\varphi_M}$$

Заметим, что всякое неподчеркнутое число единственным образом представляется как сумма подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами (подчеркнутое тоже представляется: оно равно само себе). (Это утверждение стандартно для математической дисциплины, которая называется *линейной алгеброй* и которую проходят на первом курсе в большинстве вузов. Доказывается оно так. Что неподчеркнутые числа выражаются нужным образом через подчеркнутые — это по определению так. Если же такое представление не единственно, то, вычитая одно представление из другого, мы видим, что сумма неких подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами равна 0. Но это позволяет выразить, опять-таки в виде суммы с рациональными коэффициентами, одно из подчеркнутых чисел через предыдущие подчеркнутые числа, а значит, мы зря его подчеркнули.)

Теперь мы определим функцию f *только на числах*

$$1,\ \varphi/2\pi,\ \varphi_3/2\pi,\ \varphi_4/2\pi,\ \ldots/2\pi,\ \varphi_{M-1}/2\pi,\ \varphi_M/2\pi.$$

Делаем это мы так. Сначала полагаем $f(1)=0$, $f(\varphi/2\pi)=1$. Затем для подчеркнутых φ_i (начиная с φ_3) мы определяем $f(\varphi_i/2\pi)$ как угодно (хотя бы полагаем равным 0). Если же

$$\varphi_i=r_1\varphi_1+\ldots+r_{i-1}\varphi_{i-1},$$

то мы полагаем, по определению,

$$f(\varphi_i/2\pi)=r_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+r_{i-1}f(\varphi_{i-1}/2\pi).$$

Функция f, которую мы построили, аддитивна в том смысле, что если одно из чисел, для которых она определена, равно сумме других из этих чисел (даже с любыми рациональными коэффициентами), то это же верно для значений функции на этих числах.

Дальше все очень просто. Пользуясь прежней формулой $l_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+l_Nf(\varphi_N/2\pi)$, мы ставим в соответствие каждому из *наших* наборов число. Это число не меняется при *наших* преобразованиях наборов, но в то же время оно равно l для первоначального набора и 0 для последнего (пустого). Противоречие доказывает лемму.

Вы поняли суть последнего приема? Нам не нужна аддитивная функция, определенная на всем космосе действительных чисел, нам хватит чисел, вовлекаемых в нашу конструкцию. Обычная довольно конструктивизация. Не удивляет и то, что переход на конструктивистскую точку зрения не повлиял на результат, но усложнил доказательство.

Обратная теорема

Как оказывается, верно, что *если у двух многогранников одинаковы объемы и инварианты Дена, то они равносоставленны.*

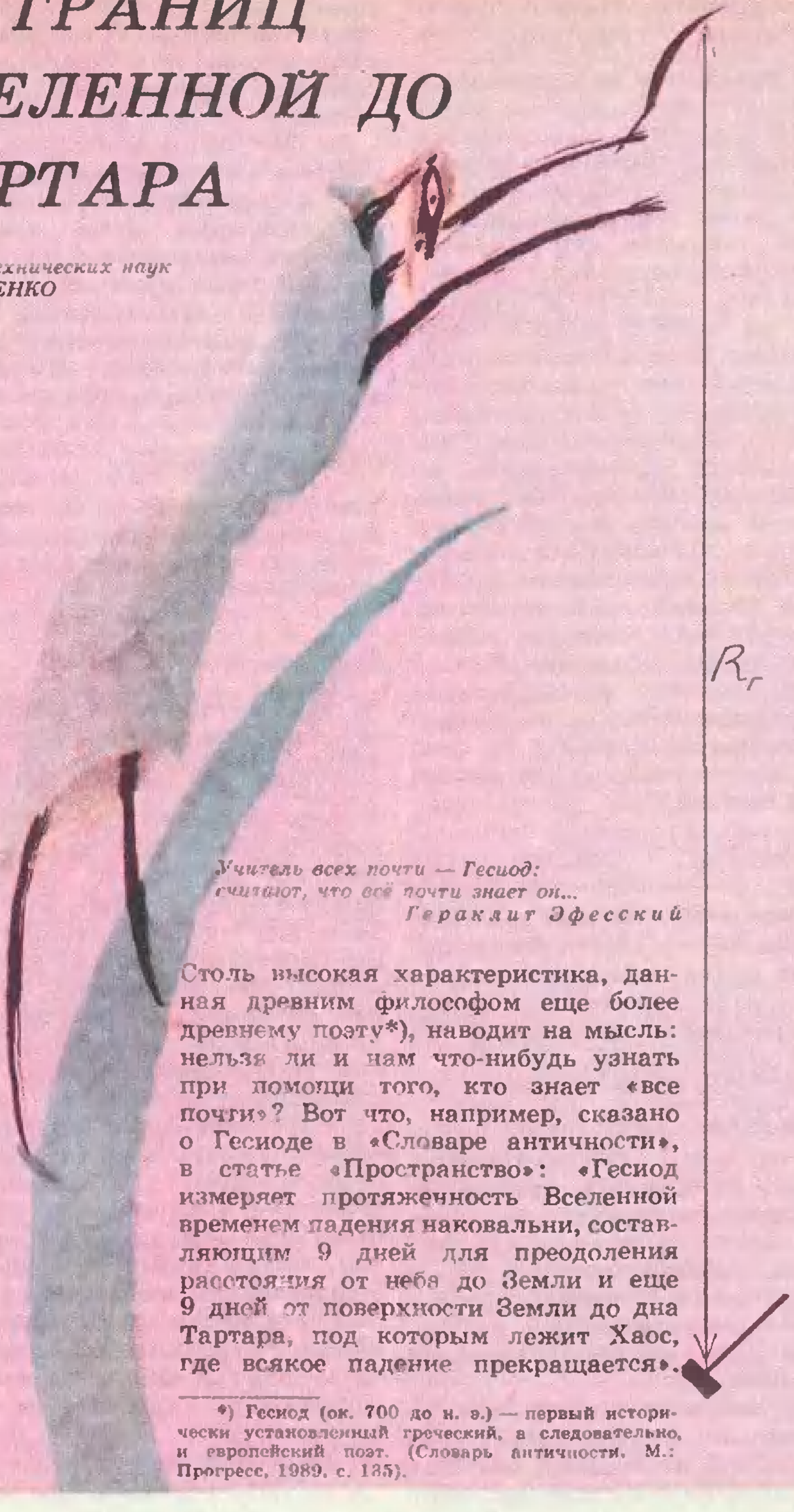
Заключение

Я снова беру в руки американский сборник, посвященный проблемам Гильберта. Что там написано о 3-й проблеме?

Быть не может! Ничего! Двадцати трем проблемам Гильберта посвящены двадцать две статьи, по штуке на каждую — кроме 3-й. Значит, в 1976 году считалось, что 3-я проблема Гильберта — никуда не ведущий тупик. Как изменилось положение дел за прошедшие полтора десятилетия! Теперь «scissor congruences», как по-английски называют равносоставленности, мелькают на страницах математических журналов. Инвариант Дена, его многомерные и гиперболические (т. е. относящиеся к геометрии Лобачевского) обобщения оказались необходимыми для K-теории, теории гомологий групп и т. д. Решенная раньше всех, 3-я проблема Гильберта позже всех заняла достойное место в математике. Может быть, дело в том, что она самая глубокая?

ОТ ГРАНИЦ ВСЕЛЕННОЙ ДО ТАРТАРА

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО



Учитель всех почти — Гесиод:
считают, что всё почти знает он...
Гераклит Эфесский

Столь высокая характеристика, данная древним философом еще более древнему поэту*), наводит на мысль: нельзя ли и нам что-нибудь узнать при помощи того, кто знает «все почти»? Вот что, например, сказано о Гесиоде в «Словаре античности», в статье «Пространство»: «Гесиод измеряет протяженность Вселенной временем падения наковальни, составляющим 9 дней для преодоления расстояния от неба до Земли и еще 9 дней от поверхности Земли до дна Тартара, под которым лежит Хаос, где всякое падение прекращается».

*) Гесиод (ок. 700 до н. э.) — первый исторически установленный греческий, а следовательно, и европейский поэт. (Словарь античности. М.: Прогресс, 1989, с. 135).

Поставим вопрос: какие численные оценки размеров Вселенной мог бы получить древнегреческий поэт, основываясь на современных нам физических представлениях и на своих утверждениях о временны́х масштабах? Как и он, разобьем исследования на два этапа: первый этап — от неба до Земли, длящийся $t_1 = 9$ дней, и второй этап — до Тартара, тоже длящийся $t_2 = 9$ дней. (Конечно, под словом «дней» будем понимать «суток» — едва ли наковальня может падать днем и не двигаться по ночам.) При этом нам придется вспомнить о самом важном — о силах, действующих на наковальню. В космосе *превалирующей будет сила всемирного тяготения, а при погружении* в атмосферу Земли нужно учесть и силу сопротивления воздуха. Далее, поскольку не у кого спросить, где расположен Тартар, будем думать, что он в самом центре Земли (дальше некуда) и, очевидно, туда должен быть как-то обеспечен доступ наковальне — например, через специальную шахту, прорытую, в целях экономии народных средств, строго радиально. Итак, первый этап —

От неба до Земли

Как известно, сила тяготения, действующая на тело массой $m_н$ вне Земли на расстоянии r от ее центра, равна

$$F = -G\frac{M_\oplus m_н}{r^2} = -m_н g_\oplus \frac{R_\oplus^2}{r^2},$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли, $g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$ — ускорение тяготения на ее поверхности. Тогда работа, которую мы должны совершить для перемещения тела на малое расстояние $dr > 0$, равна

$$dA = \frac{GM_\oplus m_н}{r^2}dr.$$

Значит, при перемещении от поверхности Земли ($r = R_\oplus$) до границы «Вселенной Гесиода» ($r = R_Г$) мы должны были бы совершить работу

$$A = \int\limits_{r=R_\oplus}^{R_Г} \frac{GM_\oplus m_н}{r^2}dr = GM_\oplus m_н\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_Г}\right).$$

Если теперь этому телу предоставить возможность свободно падать с расстояния $r = R_Г$ до поверхности Земли, то вся затраченная нами энергия перейдет в кинетическую энергию тела. Запишем это так:

$$\frac{m_н v_\oplus^2}{2} - 0 = GM_\oplus m_н\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_Г}\right).$$

($v_\oplus$ — скорость тела у поверхности Земли, а нуль слева означает, что тело не имеет начальной скорости.)

Из аналогичных рассуждений получим, что на любом расстоянии $r < R_Г$ закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{v^2(r)}{2} = GM_\oplus\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_Г}\right) = g_\oplus R_\oplus^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_Г}\right)$$

(на массу $m_н$ мы сократили). Все это можно (хотя и не обязательно) записать в виде

$$\frac{v^2(r)}{2} + \varphi(r) = 0 + \varphi(R_Г),$$

где введена функция $\varphi(r) = -g_\oplus R_\oplus^2 \frac{1}{r}$, называемая потенциалом, и учтено, что начальная скорость $v_Г = 0$. В такой

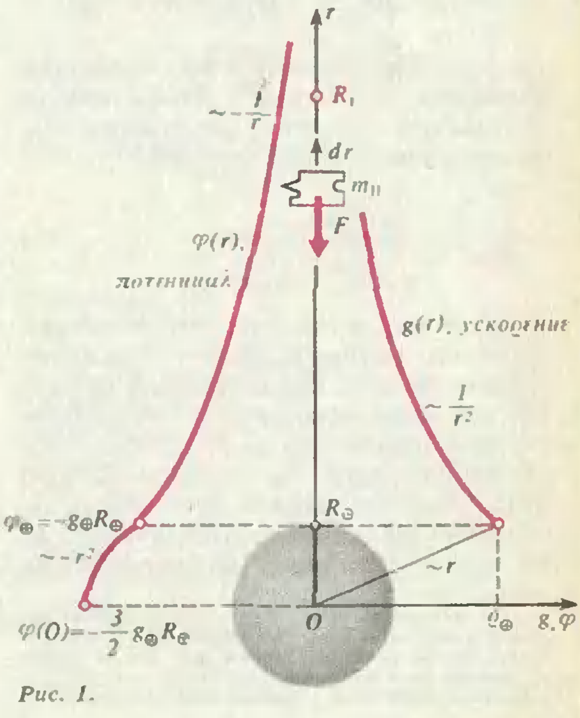


Рис. 1.

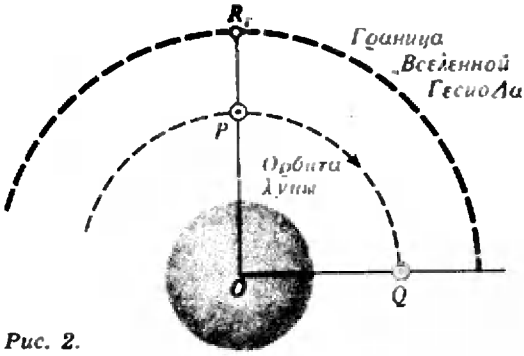


Рис. 2.

записи уже совершенно ясен закон сохранения суммы кинетической и потенциальной энергий (в расчете на единицу массы).

Можно также изобразить на рисунке (рис. 1) зависимости ускорения тяготения $g(r)=g_{\oplus}R^2_{\oplus}/r^2$ и потенциала $\varphi(r)$ при $r>R_{\oplus}$; на том же рисунке показаны и их изменения внутри Земли при $r<R_{\oplus}$ — все это довольно привычные картинки, многократно обсуждавшиеся в «Кванте» (см., например, № 3—90, с. 49).

Итак, в произвольной точке вне Земли наковальня, свободно падающая с «высоты» радиуса Гесиода $R_Г$, будет иметь скорость

$$v(r)=v_{II}\sqrt{\frac{1}{r/R_{\oplus}}-\frac{1}{R_Г/R_{\oplus}}}=-\frac{dr}{dt},$$

где $v_{II}=\sqrt{2g_{\oplus}R_{\oplus}}=\sqrt{-2\varphi_{\oplus}}$ — вторая космическая скорость*). Чтобы отсюда определить искомое расстояние $R_Г$, нужно суметь взять интеграл

$$\frac{1}{v_{II}}\int\limits_{r=R_Г}^{R_{\oplus}}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r/R_{\oplus}}-\frac{1}{R_Г/R_{\oplus}}}}=-t_1. \qquad (1)$$

Но можно, и не беря этот интеграл (если это скучно), сделать кое-какие грубые оценки. Ну, например, известно, что Луна обращается вокруг Земли приблизительно за 28 суток, одновременно падая на Землю. (Вспомним: Ньютон увидел тут аналогию с падением яблока.) Следовательно, из точки P в точку Q (рис. 2) она придет за $28/4=7$ суток. Может быть, неспроста эта величина близка к оценке Гесиода в «девять дней»? Если в этом подозрении что-то есть, то размер «Вселенной Гесиода» должен быть порядка радиуса орбиты Луны (≈ 380 тыс. км $\approx 60\ R_{\oplus}$).

Далее, наш интеграл (1) можно записать в безразмерном виде, выразив линейные размеры в единицах искомого радиуса $R_Г$:

$$\left(\frac{R_Г}{R_{\oplus}}\right)^{3/2}\int\limits_{r=R_{\oplus}}^{R_Г}\frac{\sqrt{r/R_Г}}{\sqrt{1-r/R_Г}}\,d\left(\frac{r}{R_Г}\right)=\frac{v_{II}t_1}{R_{\oplus}}. \qquad (2)$$

Тогда, обозначив интеграл через некоторую (безразмерную!) величину C, получим

$$\left(\frac{R_Г}{R_{\oplus}}\right)^{3/2}=\frac{v_{II}t_1}{CR_{\oplus}}. \qquad (3)$$

А поскольку $v_{II}/CR_{\oplus}$ — тоже постоянная, то это соотношение, записанное в виде $R_Г^3\sim t_1^2$, уж очень напоминает третий закон Кеплера о пропорциональности кубов больших полуосей эллипсов планет квадратам их времен обращения вокруг Солнца. Чувствуется, что и мы в любом случае вращаемся в кругу одних и тех же идей. Подставляя в (3) $v_{II}=11{,}2\cdot10^3$ м/с, $t_1=9\cdot24\cdot3600$ с $=7{,}8\cdot10^5$ с, $R_{\oplus}=6{,}4\cdot10^6$ м, получим

$$\frac{R_Г}{R_{\oplus}}=\frac{123}{C^{2/3}}.$$

Если предположить, что наш безразмерный интеграл в (2), который мы обозначили через C, порядка единицы (это джентльменское соглашение всегда принимается в теории размерностей и подобия), то можно сказать, что искомый радиус на два порядка больше радиуса Земли, $R_Г=10^2R_{\oplus}$, а это — тот же порядок, что в истории с Луной.

Те же, кто хочет еще уточнить размеры «Вселенной Гесиода», должны будут преодолеть процесс вычисления интеграла в равенстве (2). Сделаем замену переменной $r/R_Г=\sin^2\theta$, тогда

$$\sqrt{1-\frac{r}{R_Г}}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta,$$

$$\frac{dr}{R_Г}=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

*) Напомним, что v_{II} — это минимальная скорость, которую надо сообщить телу на поверхности Земли для того, чтобы оно могло выйти за пределы поля земного тяготения ($\varphi_{\oplus}=-g_{\oplus}R_{\oplus}$ — потенциал этого поля у земной поверхности).

так что наш интеграл примет вид

$$C=\int\limits_{r=R_\oplus}^{R_\Gamma}\frac{\sqrt{r/R_\Gamma}}{\sqrt{1-r/R_\Gamma}}\,d(r/R_\Gamma)=$$

$$=\int\limits_{\theta=\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\arcsin 1}2\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$=\int\limits_{\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Но поскольку проведенная оценка показала, что искомый радиус на два порядка больше радиуса Земли, т. е. $R_\oplus/R_\Gamma\ll 1$, можно для простоты записи нижний предел интегрирования положить равным нулю: $\arcsin(R_\oplus/R_\Gamma)\approx 0$. Тогда $C\approx\pi/2$; но мы и ожидали, что эта величина имеет порядок единицы. Итак,

$$\frac{R_\Gamma}{R_\oplus}=\frac{123}{(\pi/2)^{2/3}}\approx 90\Rightarrow R_\Gamma\approx 6\cdot 10^8\text{ м}.$$

Таким образом, «Вселенная Гесиода» полностью включает в себя орбиту Луны и простирается даже в полтора раза дальше.

Конечно, все это далеко от современной оценки размера Вселенной ($\sim 10^{26}$ м), но не так уж и плохо, если учесть, что «автор» жил 27 веков назад и притом был деревенским поэтом, а гораздо более поздние мудрецы думали, что Земля — плоский блин и стоит на трех китах.

Однако, пусть наковальня летит дальше —

От поверхности Земли до Тартара

Тут все сложнее. Как, по представлению Гесиода, падала наковальня дальше? Знал ли он о существовании воздуха как тормозящей среды? Попробуем ответить на этот вопрос с помощью самого Гесиода.

Рассмотрим два случая:

1) Воздуха нет в той шахте, которая служит предполагаемым входом в Тартар, и этот Тартар, согласно нашему предположению, расположен от поверхности Земли не далее, чем ее центр.

Итак, пусть далее тело пролетает в момент времени $t=0$ мимо поверхности Земли в шахту, идущую до самого ее центра. Напишем уравнение движения тела под действием только силы тяготения. Внутри однородной планеты эта сила пропорциональна расстоянию от центра, $F=-m_\text{н}g_\oplus r/R_\oplus$, так что

$$m_\text{н}r''=-m_\text{н}g_\oplus\frac{r}{R_\oplus},$$

или

$$r''+\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r=0\quad(0<r<R_\oplus).\qquad(4)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega=\sqrt{g_\oplus/R_\oplus}$, решение которого

$$r(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

конкретизируем, учтя начальные условия: при $t=0$ имеем

$$r=R_\oplus,\quad v(R_\oplus)=\frac{dr}{dt}\Big|_{t=0}=-v_{II}.$$

Получим

$$r(t)=R_\oplus\cos\omega t-\frac{v_{II}}{\omega}\sin\omega t.$$

В центре Земли, где $r=0$, тело окажется через время $t=t_2$ (второй отрезок времени падения наковальни). Отсюда получим

$$0=R_\oplus\cos\omega t_2-\frac{v_{II}}{\omega}\sin\omega t_2,$$

$$\operatorname{tg}\omega t_2=\frac{R_\oplus}{v_{II}}\omega=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$t_2=\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{R_\oplus}{g_\oplus}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вспомнив, что

$$g_\oplus=G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}=G\frac{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3\langle\rho\rangle}{R_\oplus^2}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi GR_\oplus\langle\rho\rangle,$$

где $\langle\rho\rangle$ — средняя плотность вещества Земли, для t_2 получим

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{\langle\rho\rangle}}\sqrt{\frac{3}{4\pi G}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Обратим внимание, что время падения от поверхности до центра зависит только от средней плотности вещества планеты $\langle\rho\rangle$. И тут Гесиод пришел бы в замешательство. Либо, считая $t_2 = 9$ дней $= 7{,}8\cdot10^5$ с, надо согласиться с тем, что плотность планеты равна

$$\langle\rho\rangle = \frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}}{t_2}\right)^2 \approx 2\cdot10^{-3}\ \text{кг/м}^3,$$

т. е. на три порядка меньше плотности воздуха (что, очевидно, нелепо), либо надо признать, что наковальня долетит до Тартара (центра Земли) гораздо быстрее:

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5{,}5\cdot10^3}}\sqrt{\frac{3}{4\cdot3{,}14\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}}\times$$
$$\times0{,}616\ \text{с}\approx500\ \text{с}.$$

Следовательно, после этой оценки Гесиод должен был бы отвергнуть предположение об отсутствии тормозящей среды. Поэтому рассмотрим второе предположение:

2) Воздух все-таки есть.

Тогда в уравнении движения (4) вместо нуля справа нужно записать силу сопротивления воздуха (деленную на массу наковальни) — эта сила пропорциональна плотности воздуха, квадрату скорости тела и квадрату его размера (или площади поперечного сечения $S_\perp$), и еще силу Архимеда, которая растет, надо думать, из-за неизбежного роста плотности воздуха ρ с глубиной. Получим

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g_\oplus}{R_\oplus}r = \frac{\rho(r)v^2(r)S_\perp}{m_н}C_c + \frac{\rho(r)}{\rho^0}\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r. \qquad (5)$$

Здесь ρ^0 — плотность вещества наковальни ($m_н = \rho^0 V_н$, $V_н$ — ее объем) и введен еще безразмерный коэффициент сопротивления C_c, который, хоть и зависит от многих параметров, однако имеет значение порядка единицы. Но даже если его считать постоянным, остается важный вопрос: как плотность воздуха ρ зависит от глубины шахты $R_\oplus - r$ (или от расстояния от центра r)?

Известно, что зависимость плотности воздуха от высоты $h = r - R_\oplus$ над Землей можно описать барометрической формулой Больцмана

$$\rho(h) = \rho_\oplus e^{-mgh/(kT)},$$

где T — температура атмосферы (предполагается постоянной), m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, $\rho_\oplus \sim 1$ кг/м^3 — значение ρ у поверхности Земли («на уровне моря»; см. рис. 3). Но что стоит под знаком экспоненты? — это ведь отношение значений двух видов энергии: потенциальной (с нулевой отметкой на уровне моря) mgh и энергии теплового движения молекул kT. Предположим, что мы сделаем шахту со стенками с той же температурой T ($T\sim300$ К) и что на некоторой глубине ускорение тяготения можно считать приблизительно равным $g_\oplus$ (вообще-то оно убывает с глубиной (см. рис. 1), но мы пока что не собираемся лезть слишком глубоко). В этих предположениях формула (5) верна. Получим значение глубины $h_* < 0$, на которой воздух будет сжат до такой плотности ρ_*, что его молекулы соприкасаются. Можно ли его будет назвать жидким — это вопрос термодинамики фазового состояния; мы для осторожности (и не напрасно) будем брать слово «жидкий» воздух в кавычки. Примем, что эта плотность ρ_* имеет порядок плотности воды ($\sim10^3$ кг/м^3). Тогда из (5) получим

$$\rho_* = \rho(h_*) = \rho_\oplus e^{-mg_\oplus h_*/(kT)} \sim 10^3\ \text{кг/м}^3,$$

$$h_* = \frac{kT}{mg_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*} = \frac{RT}{Mg_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*} =$$

$$= \frac{8{,}31\cdot300}{29\cdot10^{-3}\cdot10}\ln10^{-3}\ \text{м}\approx-60\cdot10^3\ \text{м}.$$

(Очевидно, что на этой глубине, составляющей порядка процента от радиуса Земли, ускорение тяготения действительно изменится мало.)

Что же произойдет с наковальней? Разогнавшись в свободном падении от границы «Вселенной Гесиода» ($r = R_Г$) до почти второй космической скорости, она врежется в атмосферу Земли и начнет тормозиться, нагреваясь из-за трения о воздух. Если при этом

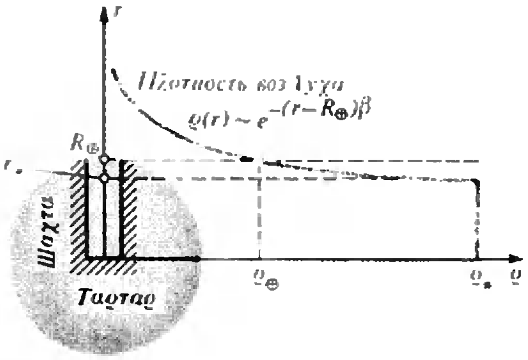


Рис. 3.

она не расплавится, не развалится, не сгорит (ведь эта наковальня, надо думать, принадлежит богу-кузнецу Гефесту), она пройдет далее в шахту, наполненную все более уплотняющимся воздухом, а затем, начиная с глубины h_* (начиная с $r_* = R_\oplus - h_*$), будет двигаться уже почти в «жидком» воздухе. Ясно, что атмосферу с характерной толщиной порядка 10 км наковальня пройдет за время порядка секунды. Еще несколько десятков (или сотен?) секунд она будет двигаться в уплотняющемся воздухе шахты, пока, наконец, почти вся ее кинетическая энергия не будет поглощена работой сил сопротивления. Это демонстративное пренебрежение к величине времени «привыкания» наковальни к новым условиям движения (или, как говорят в научном простонародье, ко времени релаксации) просто свидетельствует о нашей надежде на малость этого отрезка времени по сравнению с t_1 и t_2 и о нежелании тратить свои силы и государственную бумагу на доказательство этого (что, впрочем, не очень трудно).

Дальнейшее движение в «жидком» воздухе с плотностью ρ_* будет уже проходить в условиях равновесия силы тяжести, силы Архимеда и силы сопротивления воздуха, так что из уравнения (5) получим

$$\frac{\rho_* v^2(r) S_\perp C_c}{m_н} = \frac{g_\oplus}{R_\oplus} r\left(1 - \frac{\rho_*}{\rho^0}\right),$$

откуда

$$v(r) = \sqrt{r}\,\frac{v_{II}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*} - 1}\,\sqrt{\frac{m_н}{\rho^0 S_\perp C_c}} = -\frac{dr}{dt},$$

и, следовательно,

$$\int_0^{t_2} \frac{v_{II}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*} - 1}\,\sqrt{\frac{m_н}{\rho^0 S_\perp C_c}}\,dt = -\int_{R_\oplus}^{0} \frac{dr}{\sqrt{r}}.$$

А отсюда получаем для времени «утопания» наковальни до центра Земли

$$t_2 = \frac{R_\oplus^{3/2}\, 2\sqrt{2}}{v_{II}\sqrt{\rho^0/\rho_* - 1}\,\sqrt{V_н/(S_\perp C_c)}}.$$

Можно оценить порядок этой величины, приняв $\rho^0/\rho_* - 1 \sim 10$, $V_н/S_\perp \sim$ ~ 1 м, $C_c \sim 1$; получим $t_2 \sim 10^6$ с, что очень напоминает «9 дней» Гесиода.

Конечно, те, у кого есть компьютер, могут при желании решать уравнение (5). Нам же важно то, что слова древнего поэта Гесиода позволили обсудить несколько физических идей и заодно показать, что поэзия и физика не так уж далеки друг от друга.

(Окончание см. на с. 32)

ЗАЩИТА ОТ ШУМА И ДЕДУКТИВНЫЙ МЕТОД

(из рассказов доктора Ватсона)

Кандидат технических наук
Р. ВИНОКУР

«С тех пор, как по моей улице стал ходить трамвай, мой дом перестал быть моей крепостью. В кабинете теперь шумно, это мешает работать и нервирует пациентов. Толстые кирпичные стены почти не пропускают шума, однако он проникает через окно, как бы плотно я его ни затворял... И как кстати это неожиданное появление стекольщика. Он долго осматривал окно и предложил вставить в раму еще одно стекло, чтобы вместо однослойного остекления получилось двойное: два стекла толщиной по 3 мм*) с промежутком 15 мм между ними...»

— Дорогой Ватсон! — четкий голос Холмса прервал мои размышления.— Надо увеличить и толщину стекол, и ширину промежутка. Это, конечно, обойдется дороже, но затраты безусловно окупятся достигнутым комфортом.

— Холмс,— удивился я,— как вы прочитали мои мысли?

— Ничего проще,— улыбнулся знаменитый сыщик.— В газете на столе вашей рукой подчеркнут адрес стекольной мастерской и сделана надпись «двойное остекление — от шума». Затем, я обратил внимание, как вы, поморщившись от грохота очередного трамвая, задумчиво начертили пальцем на запотевшем стекле «3+ +15+3». Вот, пожалуй, и все.

— Действительно, просто,— согласился я,— но тогда не поможете ли мне разобраться в этом деле?

— Истинный сыщик, на мой взгляд, должен иметь представление об акустических эффектах. Добавьте сюда мое увлечение музыкой, и вам станет ясно, почему я в курсе проблемы.

Постараюсь вам помочь. Часто говорят, что звуковая волна проходит сквозь стену. Но не следует понимать это буквально. Падающая на стену от какого-нибудь источника звука волна оказывает на нее переменное во времени давление, амплитуда которого Δp значительно меньше атмосферного давления p. Однако это воздействие вполне достаточно, чтобы вызвать колебания стены в направлении, перпендикулярном ее поверхности. А эти колебания, в свою очередь, вызывают колебания воздуха. Иными словами, колеблющаяся стена излучает звук. Таким образом, прошедшая волна — волна, излученная стеной в защищаемое (изолируемое) от шума помещение. Энергия E прошедшей волны пропорциональна произведению Sv^2, где S — площадь стены, v — амплитуда скорости колебаний той поверхности стены, которая обращена в изолируемое помещение. Чем меньше величина E по сравнению с энергией E_0 падающей волны (рис. 1), тем лучше шумозащитные свойства стены (иначе говоря — звукоизоляция). Чтобы понять, от чего в основном зависят эти свойства, обратимся к аналогии. Вы, наверное, знаете такой цирковой номер: на грудь лежащего атлета ставится тяжеленная наковальня, и по ней изо всех сил бьют молотом. Публика — в экстазе: ей представляется, что сила ударов, способных сплющить рыцарский шлем, к тому же складывается с весом наковальни. Однако эффект

*) Для удобства нашего читателя здесь и в дальнейшем традиционные английские дюймы, фунты и т. п. заменены соответствующими единицами СИ.

здесь совершенно обратный. В грудь атлета бьет не молот, а наковальня, а то ускорение, которое сообщает наковальне при ударе молот, очень мало из-за ее огромной массы (вспомните второй закон Ньютона). Следовательно, очень мала и скорость, приобретаемая наковальней. Так что она, наковальня, как бы «гасит» удары молота. В нашей задаче роль наковальни играет стена (я имею в виду стену как одиночную плиту или массивную пластину); удары молота — это падающая на стену звуковая волна, а толчки наковальни, которые испытывает на себе атлет,— прошедшая звуковая волна. И, по аналогии, чем массивнее стена, тем лучше звукоизоляция.

Конечно, звукоизоляция зависит и от упругих свойств стены, и от ее способности поглощать энергию механических колебаний, преобразуя ее в тепловую, но обычно в меньшей степени, чем от массы стены. Точнее, от ее так называемой поверхностной плотности

$$\sigma = \frac{m}{S} = \rho h,$$

где m — масса стены, h — ее толщина, ρ — плотность материала, из которого она сделана. Действительно, если принять величину Δp одинаковой для всех точек поверхности стены со стороны падающей волны, то амплитуда ускорения стены —

$$a = \frac{\Delta p S}{m} = \frac{\Delta p}{\sigma},$$

а при колебаниях $v \sim a$. Так что чем больше поверхностная плотность стены σ, тем меньше амплитуда скорости колебаний стены v и тем меньше, следовательно, энергия прошедшей звуковой волны.

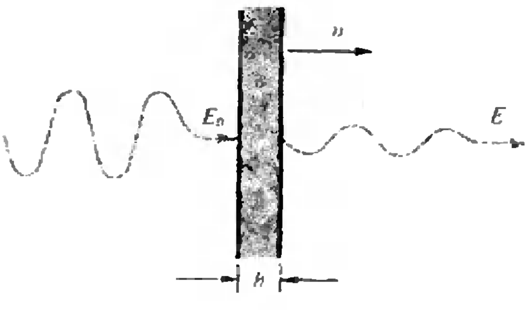


Рис. 1. Схема прохождения звука через однослойное ограждение.

— Это интересно,— заметил я.— Однако можно ли как-то сопоставить поверхностную плотность стены и воспринимаемое на слух снижение шума?

— Существуют ориентировочные соотношения,— ответил Холмс.— Например, в моем доме стены толщиной 0,75 м сделаны из кирпича, а его плотность $\rho \approx 1600$ кг/м^3, так что $\sigma \approx 1200$ кг/м^2. При этом звуки пистолетных выстрелов в моем домашнем тире почти не беспокоят соседей. При $\sigma \approx 500$ кг/м^2 вы не услышите даже громкого разговора за стеной. Если $\sigma \approx 200$ кг/м^2, то он уже будет вам слышен, но спокойная речь не слышна. При $\sigma \approx 50$ кг/м^2 вы услышите и ее, причем почти разборчиво. Естественно, эти оценки надежны, если в стене отсутствуют сквозные отверстия или, хуже того, щели. Совсем плоха как звукоизолятор тонкая фанерная перегородка, и не потому, как считают некоторые, что фанера хорошо проводит звук, а только по причине очень малой поверхностной плотности такой перегородки — около 5 кг/м^2.

— Плохо дело,— сообразил я.— Плотность стекла 2500 кг/м^3, значит, поверхностная плотность 3-миллиметрового стекла всего 7,5 кг/м^2, почти как у фанерной перегородки. Неужели легкие пластины совсем не годятся для защиты от шума?

— К счастью, годятся,— успокоил меня Холмс.— Но не в одиночку. Хорошую звукоизоляцию дают ограждения, состоящие из двух пластин, разделенных воздушным промежутком достаточной толщины. Чем легче пластины, тем больше должен быть промежуток между ними. Понять физическую природу этого эффекта нам поможет все тот же трамвай. Его кузов (с водителем, кондуктором и пассажирами) соединен с шасси не жестко, а через специальные упругие элементы — амортизаторы. Это сделано для того, чтобы вибрации шасси, неизбежные при движении трамвая,

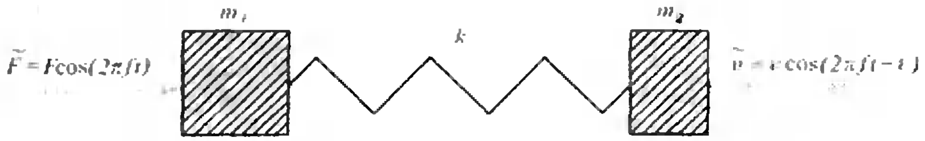


Рис. 2. Механическая система, совершающая вынужденные колебания с частотой f; ε — сдвиг фаз между силой $\tilde{F}$, действующей на первое тело, и скоростью $\tilde{v}$ второго тела.

доходили до кузова в ослабленном виде. Можно рассмотреть простую механическую систему, имитирующую этот процесс: два абсолютно жестких тела с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой пружиной с жесткостью k (рис. 2). Если на первое тело действует сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону с частотой f, то система совершает вынужденные колебания. Здесь первое тело играет роль трамвайного шасси, второе — кузова, а пружина — это амортизатор. Надо так подобрать величину k, чтобы амплитуда скорости колебаний второго тела v была как можно меньше, в этом — цель амортизации. Можно записать уравнения движения обоих тел и, решив их, получить зависимость величины v от параметров системы и частоты звука. Однако, если не возражаете, я приведу готовые результаты, причем в основном в качественном виде.

Собственная частота колебаний этой системы —

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

Если частота f вынуждающей силы равна f_0, наступает резонанс — амплитуда колебаний второго (да и первого) тела резко возрастает, причем она тем больше, чем меньше в системе потери механической энергии за счет преобразования ее в тепло (например, из-за трения). В области частот $f \lesssim \frac{1}{2} f_0$ система колеблется как одно жесткое тело с массой $m = m_1 + m_2$ и амплитуда скорости колебаний v практически не зависит от упругости пружины. В случае же $f > f_0$ величина v также зависит от массы системы, однако очень быстро уменьшается с ростом частоты. Поэтому амортизаторы подбирают так, чтобы резонансная частота системы была хотя бы вдвое меньше частоты вынуждающей силы...

— Об амортизаторах я кое-что знаю,— прервал я плавную речь Холмса.— Но как это связано со звукоизоляцией с помощью двойных ограждений?

Холмс посмотрел на меня слегка сочувственно.

— Слой воздуха между пластинами (рис. 3) играет роль амортизатора. И мы можем оценить его жесткость. Если толщина слоя d, то объем воздушного зазора $V = Sd$ (S — площадь каждой пластины). При смещении пластин в случае их колебательного движения толщина промежутка может изменяться на небольшую величину Δx. Тогда по закону Бойля — Мариотта имеем:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = pV,$$

где $\Delta V = S \cdot \Delta x$ — изменение объема воздуха, Δp — изменение его давления. Учитывая, что $\Delta V \ll V$, $\Delta p \ll p$, и пренебрегая произведением малых величин, получаем:

$$\Delta p = -p \cdot \Delta V / V = -p \cdot \Delta x / d.$$

Таким образом, максимальная сила, с которой действует колеблющийся воздух на пластины,—

$$F = -\Delta p \cdot S = -\frac{pS}{d}\Delta x,$$

и, следовательно, жесткость воздушного слоя между пластинами $k = pS/d$.*)

Итак, по аналогии с «трамвайной» задачей записываем резонансную частоту системы двойного остекления:

*) Холмс рассматривал колебания воздуха в зазоре как изотермический процесс, что не совсем верно. Строгое решение задачи о звуковом давлении Δp сложнее, однако полученное Холмсом значение k очень близко к точному.

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pS}{d}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p}{d}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)}.$$

При $f\lesssim\frac{1}{2}f_0$ звукоизоляционная система двойного ограждения примерно эквивалентна однослойному ограждению с поверхностной плотностью $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$. В области частот, равных или близких к величине f_0, звукоизоляция даже хуже, чем при таком однослойном ограждении, и только при $f\gtrsim 2f_0$ можно рассчитывать на существенное улучшение. Оценим значение резонансной частоты для двойного остекления из 6-миллиметровых стекол с промежутком 200 мм. Подставляя $\sigma_1=\sigma_2\approx 15$ кг/м^2 и атмосферное давление $p\approx 10^5$ Н/м^2, получаем $f_0\approx 41$ Гц...

За окном загрохотал очередной трамвай. Холмс некоторое время внимательно прислушивался, а затем продолжил:

— Досаждающий вам шум наиболее силен на частотах от 100 до 500 Гц. Наименьшая частота этого диапазона более чем вдвое превышает резонансную частоту остекления, так что все в порядке. А вот для варианта, предложенного стекольщиком, резонансная частота гораздо выше — примерно 210 Гц. Такое решение не только не помогло бы вам, но еще и усугубило бы ситуацию. Странно... Обычно мастера недостаток теоретических знаний в значительной мере компенсируют накопленным опытом и здравым смыслом. Послушайте, Ватсон, а как выглядит этот стекольщик?

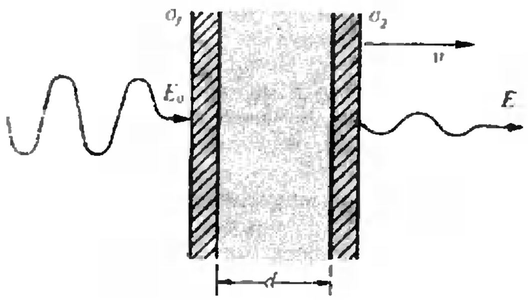


Рис. 3. Схема прохождения звука через двойное ограждение.

Я принялся описывать внешность своего неожиданного посетителя. Холмс слушал, стоя у окна и глядя на дом напротив, и лишь однажды перебил меня, спросив, не было ли у незванного визитера большой родинки на левой щеке. Получив утвердительный ответ, Холмс, казалось, потерял интерес к разговору, скоро собрался и ушел, пообещав придти завтра. Я ждал его с нетерпением, понимая, что впереди — интересная история. Так оно и вышло.

— Инспектор Лестрейд предупредил меня накануне,— начал Холмс, удобно расположившись в кресле у окна,— что в Лондоне объявился бежавший с каторги весьма ловкий вор Джон Бертон. В свое время он внимательно изучил ваши записки о Шерлоке Холмсе и, будучи от природы наблюдательным и сообразительным малым, мог бы вполне законно считаться моим учеником, если бы не применял дедуктивный метод в недостойных целях. В доме прямо напротив вас живет небогатый, но весьма искусный ювелир, человек настолько осторожный, что, не доверяя замкам и сейфам, прячет изделия в различных потайных местах своих комнат. Недавно он получил заказ от самого правительства, об этом писали в газетах. Бертон решил проникнуть в дом ювелира и выкрасть присланные для отделки драгоценности. Но как выявить тайники? Он заметил, что ювелир иногда забывает зашторивать окна, и они хорошо просматриваются из вашего дома, особенно вечером, когда в комнатах зажигают свет. Под видом стекольщика он зашел к вам и, наблюдая из окна, увидел, куда прячутся на ночь драгоценности. Когда вы поинтересовались его координатами, он сообщил первый попавшийся на глаза в газете адрес стекольной мастерской. Не имея необходимой квалификации, он не смог дать вам дельного совета. Это-то и вызвало мои подозрения...

О том, чем закончилась эта история, читатель может догадаться сам.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1251 — М1255, Ф1258 — Ф1262

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1251» или «Ф1258». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1251. На плоскости дан угол (меньше развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s, отрезающие от угла четырехугольник наибольшей площади (P и Q — точки на сторонах угла, M — внутри угла).

В. Сендеров

М1252. Пусть a и n — натуральные числа, $a>1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем a^n-1 делится на n.

К. Кохась

М1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников,— «карта» из нескольких «стран». Будем говорить, что такая карта *реализуема* в пространстве, если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — M, а проекции остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (причем все они лежат внутри M).

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники;

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

С. Оревков

М1254. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m\times n$ клеток, $m\geqslant n>1$. Докажите, что его можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы Г в том и только в том случае, если mn делится на 8.

Б. Гинзбург, Д. Фомин

М1255. Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее из расстояний между двумя его скрещивающимися ребрами. Докажите неравенства $1/2<d/h<3/2$.

А. Скопенков

Ф1258. На горизонтальном столе находится катушка радиусом R. На катушку намотана тонкая невесомая нить, радиус намотки равен r. Нить пропущена через маленькое отверстие на высоте h от поверхности стола ($h>R$). В начальный момент катушка неподвижна, а нить вертикальна (рис. 1). За нить начинают тянуть с постоянной силой F, и катушка катится по столу без проскальзывания. Найти максимальную скорость катушки. Масса катушки M. Считайте, что половина всей массы сосредоточена на оси катушки, а вторая половина распределена по внешнему ободу радиусом R. Нить считать гладкой.

А. Ходулев

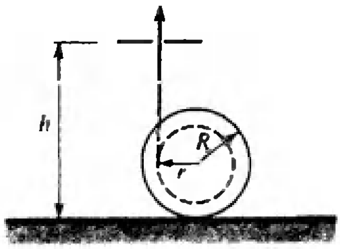


Рис. 1.

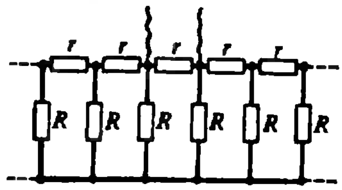


Рис. 2.

Задачник «Кванта»

Ф1259. Свисток издает звук частоты $f_0=2000$ Гц. Как изменится частота звука, если температура воздуха поднимается от 20 до 40 градусов по Цельсию? Какой тон будет издавать свисток в воздушном колоколе для подводных работ, в который подается дыхательная смесь из гелия и кислорода под давлением 1,5 атм? Парциальное давление кислорода принять равным 0,3 атм. Как изменится в этом колоколе тон речи человека? Нужно ли будет перестраивать гитару, чтобы она звучала в колоколе так, как снаружи?

А. Зильберман

Ф1260. Хорошо всем известная бесконечная цепочка резисторов (рис. 2) содержит резисторы r и R. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами (разделенными ровно одним резистором r)? Чему равно сопротивление, измеренное между двумя узлами, которые находятся очень далеко друг от друга? Найти это сопротивление в общем случае, когда между интересующими нас точками включено ровно n резисторов r.

П. Родин

Ф1261. К батарейке напряжением $U_0=4$ В последовательно подключены два конденсатора, емкости которых $C_1=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ. Катушку индуктивностью $L=1$ Гн подключают параллельно конденсатору C_1. Найти амплитуду тока в катушке. К моменту подключения катушки напряжения на конденсаторах считать установившимися. Потерями в цепи пренебречь.

Р. Александров

Ф1262. Электрический вентилятор с асинхронным двигателем, включенный в сеть 220 В, развивает 1800 об/мин. Чтобы он не гудел так громко, его подключают через автотрансформатор к напряжению 127 В. С какой скоростью он будет вращаться? Считайте, что нагрузка на лопасти вентилятора определяется перегоняемым воздушным потоком. Трением в подшипниках пренебречь. Силу тока в обмотках статора считать зависящей только от приложенного напряжения.

О. Фатьянов

Решения задач

М1226—М1230, Ф1238—Ф1242

М1226. *Если квадрат повернуть вокруг его центра на 45°, то его стороны разделятся в некотором отношении (рис. 1). Возьмем теперь произвольный выпуклый четырехугольник. Разделим его стороны в указанном отношении и через точки деления проведем прямые, образую-*

Отношение, в котором каждый квадрат на рисунке 1 делит стороны другого квадрата, равно $1:\sqrt{2}:1$. Действительно, если обозначить меньший отрезок через x, то больший равен $x\sqrt{2}$.

Рассмотрим четырехугольник, образованный в соответствии с условиями задачи (см. рис. 2). Как следует из подобия треугольников, его стороны параллельны диагоналям исходного четырехугольника, т. е. этот четырехугольник — параллелограмм, причем отношение его стороны к параллельной ей диагонали исход-

щие новый четырехугольник (рис. 2). Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

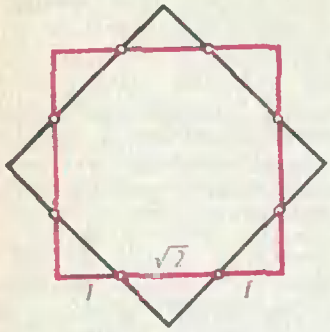


Рис. 1.

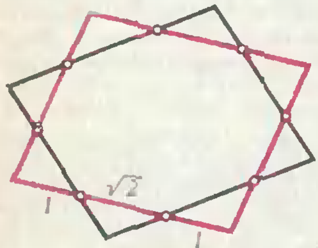


Рис. 2.

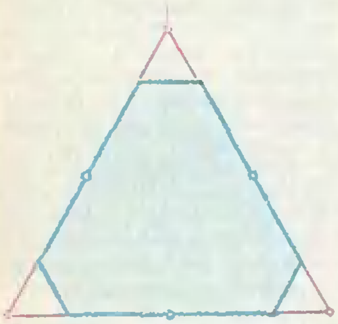


Рис. 3.

ного четырехугольника равно $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Остается заметить, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на половину синуса угла между ними, а площадь параллелограмма равна произведению соседних сторон на синус угла между ними: если a и b — диагонали исходного четырехугольника, то стороны параллелограмма будут равны $a/\sqrt{2}$ и $b/\sqrt{2}$, угол α между ними будет равен углу между диагоналями, поэтому площади первоначального четырехугольника и параллелограмма обе равны $(ab \sin\alpha)/2$.

Любопытно рассмотреть аналогичную задачу для треугольников. *При повороте* правильного треугольника вокруг центра на 60° его стороны разделят стороны исходного в отношении 1:1:1; при делении сторон некоторого треугольника в этом отношении после проведения прямых через точки деления получается равный (симметричный) ему треугольник. *Но для многоугольников с числом сторон $n>4$* соответствующая процедура не сохраняет площадь.

Для шестиугольников это проверяется особенно просто. (Сторону нужно делить здесь в отношении $1:\sqrt{3}:1$.) Рассмотрим вырожденный шестиугольник, вершинами которого являются вершины правильного треугольника и середины его сторон (рис. 3). Если стороны полученного шестиугольника разделить в отношении $1:\sqrt{3}:1$, то *после проведения* соответствующих прямых получится шестиугольник, являющийся частью исходного треугольника, т. е. заведомо имеющий меньшую площадь. Разумеется, тот же эффект будет и для невырожденного выпуклого шестиугольника, близкого к этому вырожденному. Такие же (близкие к «вырожденным») примеры n-угольников, для которых площадь не сохраняется, можно построить и для других $n>4$.

А. Савин

М1227. *Назовем шахматный турнир, в котором n игроков сыграли друг с другом по одной партии, логичным, если для любых двух игроков тот из них, кто набрал не больше очков, не выиграл и в личной встрече. (За выигрыш дается 1 очко, за ничью — 1/2, за поражение — 0.)*

Пусть турнир нелогичный. Найдутся два игрока A и B такие, что A набрал не больше очков, чем B, но выиграл у B в личной встрече. Тогда найдется игрок C такой, что A сыграл с C хуже, чем B с C (иначе со всеми $n-2$ игроками, кроме A и B, A набрал бы не меньше очков, чем B). *Изменим турнирную* таблицу следующим образом: партию A с B заменим ничьей, результат игры A с C увеличим на 1/2, а B с C — уменьшим на 1/2. При этом итог — сумма, набранная каждым игроком,— не изменится, а общее число ничьих увеличится.

Докажите, что, каков бы ни был турнир, тот же итог (распределение очков между участниками) достигается и в некотором логичном турнире.

Теперь из всех турниров с данным итогом выберем такой, в котором число ничьих наибольшее. В нем уже нельзя найти пару A, B игроков, нарушающих «логичность», так что этот турнир удовлетворяет требуемым условиям.

В связи с этой задачей естественно возникает вопрос: какие строчки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полуцелых чисел могут быть итоговыми для турнира с n участниками? Попробуйте найти необходимые и достаточные условия.

А. Зелевинский, С. Оревков

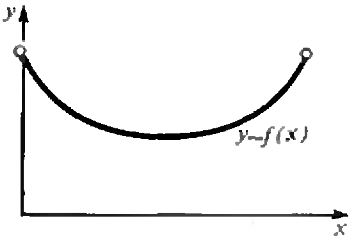
М1228. *Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, не превосходящих 1, выполнено неравенство*

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2.$$

Приведем два решения. Первое — чисто алгебраическое, второе — скорее аналитическое. Заметим сразу, что поскольку a, b, c входят в условие совершенно симметрично, можно считать, что $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$.

1. Так как $(1-a)(1-b)\geqslant 0$, то $a+b\leqslant 1+ab\leqslant 1+2ab$. Следовательно, $a+b+c\leqslant a+b+1\leqslant 2+2ab$. Поскольку $1+ab\leqslant 1+ac\leqslant 1+bc$,

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant\frac{a+b+c}{1+ab}\leqslant 2. \qquad (*)$$



2. Рассмотрим левую часть неравенства (*) как функцию $F(a)$ на отрезке $0\leqslant a\leqslant b$. Ее наибольшее значение достигается в одном из концов отрезка, поскольку она «выпукла вниз» — ее производная по a возрастает на этом отрезке. Так будет для любой функции $y=f(x)$, являющейся суммой функций вида $y=kx$ и $y=\dfrac{p}{qx+r}$ с положительными k, p, q, r при $x>0$ (см. рисунок). Таким образом, F не превосходит одной из величин, получающихся при $a=0$ и $a=b$: $b+c$ или $2b/(bc+1)+$ $+c/(b^2+1)$. По условию, $b+c\leqslant 2$; второе выражение как функция от c на отрезке $b\leqslant c\leqslant 1$ не превосходит одной из величин:

$$\frac{2b}{b^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\leqslant\frac{3b}{b^2+1}\leqslant\frac{3}{2}\ \text{или}\ \frac{2b}{b+1}+\frac{1}{b^2+1}=$$
$$=2-\frac{2b^2-b+1}{(b+1)(b^2+1)}\leqslant 2.$$

$$f(x)=kx+\sum_i\frac{p_i}{q_ix+r},$$

$$f'(x)=k-\sum_i\frac{p_iq_i}{(q_ix+r)^2}$$

Можно несколько изменить рассуждения во втором решении, рассматривая функцию F сразу на всем «кубе» $0\leqslant a\leqslant 1$, $0\leqslant b\leqslant 1$, $0\leqslant c\leqslant 1$. Из сказанного ясно, что максимум функции F достигается в вершинах куба, т. е. в точках, где a, b, c равны 0 или 1. Небольшой перебор показывает, что в этих точках $F\leqslant 2$ (см. табличку на полях), причем $F=2$ только, если одно из чисел a, b, c равно 0 и два другие равны 1 (это можно увидеть и из первого решения).

a	b	c	F
0	0	1	1
0	1	1	2
1	1	1	3/2

Д. Фомин, Н. Васильев

M1229. *Докажите, что при каждом натуральном $m>1$ число*
а) 4^m+5;
б) 8^m+9;
в) a^m+a+1, где a — целое и не делится на 8;
не является квадратом целого числа.

а) Предположим, что $4^m+5=q^2$, где q — натуральное число. Тогда $(q+2^m)(q-2^m)=5$. Поэтому $q+2^m=5$, $q-2^m=1$, откуда $q=3$, $2^m=2$, т. е. $m=1$. Таким образом, число 4^m+5 может быть квадратом лишь при $m=1$.

б) Число 8^m+9 — нечетное. Предположим, что $8^m+9=(2p+1)^2$, где p — натуральное число. Тогда $8^m=(2p+1)^2-3^2=(2p-2)(2p+4)$, откуда

$$2^{3m-2}=(p-1)(p+2).$$

Поскольку числа $p-1$ и $p+2$ разной четности, это возможно лишь при $p-1=1$, $p=2$, но тогда $p+2=4$ и $3m-2=2$, что невозможно при целом m.

в) Здесь при четном m работает та же идея, что и в пункте а): число $N=a^m+a+1$ находится слишком близко к a^m; а при нечетном m, как и в пункте б), достаточно разобраться с остатками при делении на степени двойки.

Пусть сначала $m=2r$. Тогда

$$a^{2r}<a^{2r}+a+1<a^{2r}+2a^r+1=(a^r+1)^2,$$

т. е. $a^{2r}+a+1$ — не квадрат.

Пусть теперь $m=2r+1$. Тогда, рассматривая различные возможные остатки 1, 2, 3 при делении a на 4, убеждаемся, что N дает при делении на 4 остаток 3 (см. табличку на полях), а при $n=8k+4$ число $N=(8k+4)^m+8k+4+1$ дает остаток 5 при делении на 8.

Остатки при делении на 4 (при нечетном $m>1$):

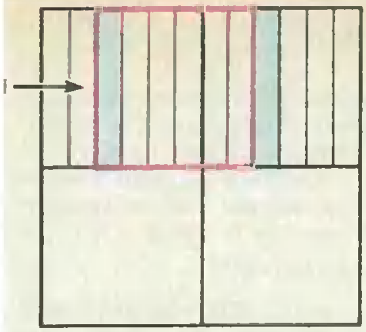
a	a^m	$N=a^m+a+1$
1	1	3
2	0	3
3	3	3

Но квадрат может давать при делении на 8 лишь остатки 0, 1 или 4. В самом деле, при целом k
$(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1$, $(4k\pm2)^2=16k^2\pm8k+4$,
$(4k\pm3)^2=16k^2\pm24k+1$, $(4k)^2=16k^2$.
Заметим, что при a, кратном 8, утверждение задачи не всегда верно: например, при $a=72$ и $m=3$ число $a^m+a+1=611^2$. (Из общих теорем алгебраической геометрии следует, что при каждом $m>3$ уравнение $x^m+x+1=y^2$ имеет лишь конечное число решений в целых числах.)

Р. Хайруллаев

M1230. *В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.*

Разобьем квадрат 100×100 на четыре четверти — квадраты 25×25. Если во всех них сумма чисел имеет один и тот же знак (или равна 0), то, очевидно, в одном из них она не превосходит по модулю четверти общей суммы, т. е. 25. В противном случае найдутся две соседние четверти, в которых суммы имеют разные знаки. Рассмотрим цепочку квадратов 25×25, соединяющую эти четверти, в которых соседние квадраты отличаются лишь 50-ю числами, заполняющими два ряда возле противоположных сторон (см. рисунок). Пусть s_0, s_1, ..., s_{25} — суммы чисел в этих квадратах; s_0 и s_{25} имеют разные знаки и $|s_{i+1}-s_i|\leqslant50$. Найдет-



ся i такое, что s_i и s_{i+1} имеют разные знаки. Тогда одно из них по модулю не больше 25.

С. Генкин

Ф1238. *В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится небольшой воздушный пузырек. Если поставить трубку вертикально, то пузырек будет двигаться с постоянной по величине скоростью $v_0=1$ см/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали ее вдоль длинной стороны до скорости $v=20$ м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с? Где он окажется после того, как трубку затормозят?*

Глицерин — очень вязкая жидкость, поэтому можно считать, что в любой момент скорость пузырька относительно трубки пропорциональна ускорению трубки (и пузырька!) относительно земли — сила вязкого трения пропорциональна относительной скорости. Учитывая связь между ускорением, скоростью и перемещением точки, можно сказать, что перемещение пузырька относительно трубки связано с его скоростью относительно трубки так же, как скорость трубки относительно земли с ускорением трубки относительно земли.

Движение пузырька при вертикальном положении трубки такое же, как если бы при горизонтальном положении трубку двигали с постоянным по величине ускорением $a=g=10$ м/с^2 (скорость пузырька направлена в ту же сторону, что и ускорение — пузырек легче воды). Учтем числа из условия: при ускорении трубки 10 м/с^2 за 1 секунду она приобретет скорость 10 м/с, а пузырек сдвинется при этом на 1 см.

Итак, скорости трубки 10 м/с соответствует смещение 1 см. Значит, при скорости 20 м/с пузырек остановится на расстоянии 2 см от начального положения. При увеличении скорости до 30 м/с он сдвинется еще на 1 см, а когда трубка остановится, пузырек вернется в начальное положение.

А. Андрианов

Ф1239. *В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Начнем сжимать газ, опуская поршень. После того как совершили работу A, поршень отпустили, и он остановился в новом положении равновесия. Найти температуру T_x в этом состоянии.*

Работа A, совершаемая над системой, идет на изменение *внутренней энергии газа ΔU и потенциальной энергии* поршня ΔE_p:

$$A=\Delta U+\Delta E_p.$$

Для моля одноатомного идеального газа изменение внутренней энергии дается выражением

$$\Delta U=\frac{3}{2}R(T_x-T_0).$$

Изменение потенциальной энергии поршня можно найти так — оно равно работе, которую нужно было бы совершить, чтобы квазистатически перевести поршень из начального положения в конечное. При этом внешняя сила, совершающая работу, в каждый момент времени должна быть равна силе тяжести mg, действующей на поршень. Поскольку поршень в начальном и конечном состояниях находится в равновесии, эта сила тяжести равна по модулю силе давления газа в сосуде pS (давлением наружного воздуха мы пренебрегаем). Обозначив через Δh изменение высоты поршня, получим

$$\Delta E_p = mg\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема газа. Воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона для 1 моля газа, найдем

$$\Delta E_p = p\Delta V = R(T_x - T_0).$$

Таким образом,

$$A = \frac{3}{2}R(T_x - T_0) + R(T_x - T_0) = \frac{5}{2}R(T_x - T_0),$$

и следовательно,

$$T_x = T_0 + \frac{2}{5}\,\frac{A}{R}.$$

В. Уздин

Ф1240. *В схеме, приведенной на рисунке 1, емкости конденсаторов равны C, сопротивления резисторов — R и 2R. Какой заряд протечет через перемычку AB после подключения батарейки с напряжением U_0? А если между точками A и B включен резистор R? Все элементы считать идеальными.*

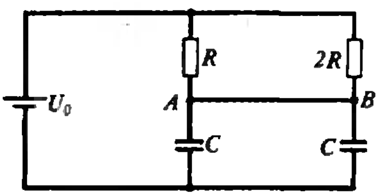


Рис. 1.

Вначале разберем случай с перемычкой (ее сопротивление равно нулю). Каждый из конденсаторов в конце концов будет заряжен до напряжения U_0, т. е. через резисторы пройдет заряд

$$q = 2CU_0.$$

Однако ток, текущий через R, в любой момент в два раза больше тока через $2R$. Таким образом, через перемычку пройдет заряд

$$Q = q_R - q_C = \frac{2}{3}q - \frac{1}{2}q = \frac{CU_0}{3}.$$

Теперь обсудим общий случай — сопротивление перемычки не равно нулю. Рассмотрим некоторый момент времени, когда батарейку уже подключили, но равновесие еще не установилось (рис. 2). Ток, текущий через резистор R (перемычка), равен

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} = \frac{q_1 - q_2}{RC}.$$

За малый промежуток времени Δt произойдут следующие изменения зарядов:

$$\frac{U_0 - \varphi_A}{R_1}\Delta t = I\Delta t + \Delta q_1,$$

$$\frac{U_0 - \varphi_B}{R_2}\Delta t + I\Delta t = \Delta q_2.$$

Домножим первое равенство на R_1, второе — на R_2 и вычтем одно из другого. В результате получим

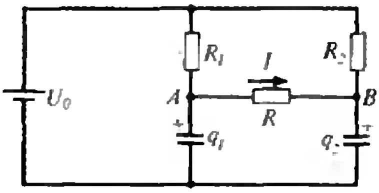


Рис. 2.

$$I\Delta t = \frac{R_2\Delta q_2 - R_1\Delta q_1}{R_1+R_2+R}.$$

Суммируя по всем промежуткам времени Δt и учитывая, что после установления равновесия заряды на конденсаторах будут одинаковыми и равными $q_1=q_2=q=CU_0$, найдем искомый заряд:

$$Q=\frac{(R_2-R_1)CU_0}{R_1+R_2+R}=\frac{CU_0}{4}.$$

А. Зильберман

Ф1241. *На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ лежит небольшая шайба массой M, на которой помещен заряд Q. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно наклонной плоскости, как показано на рисунке 1. Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление ее установившейся скорости.*

Сразу заметим, что, если $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$, шайба вообще не поедет. Поэтому будем обсуждать случай $\mu < \operatorname{tg}\alpha$.

Рассмотрим силы, действующие на шайбу и лежащие в плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 2). Это — составляющая $\vec{F}_т$ силы тяжести, направленная по плоскости вниз и равная $F_т=Mg\sin\alpha$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная против скорости $\vec{v}$ шайбы и равная $F_{тр}=\mu Mg\cos\alpha$, и магнитная сила $\vec{F}_м$, перпендикулярная скорости $\vec{v}$ и равная $F_м=QvB$. При установившемся движении векторная сумма всех трех сил равна нулю:

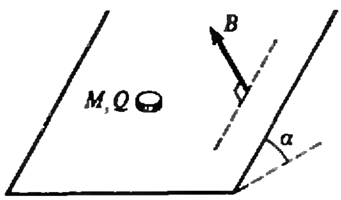


Рис. 1.

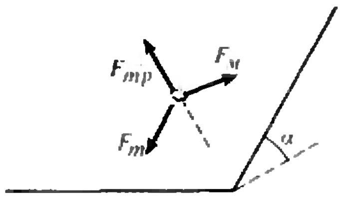


Рис. 2.

$$\vec{F}_т+\vec{F}_{тр}+\vec{F}_м=0,$$

или, учитывая перпендикулярность сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}_м$,

$$F_т^2=F_{тр}^2+F_м^2.$$

Отсюда находим величину установившейся скорости:

$$v=\frac{Mg}{QB}\sqrt{\sin^2\alpha-\mu^2\cos^2\alpha}$$

и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{F}_т$:

$$\beta=\arcsin\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

А. Алексеев

Ф1242. *Из нескольких одинаковых CL-звеньев, подключенных друг за*

Ясно, что выполнить условие задачи можно только в том случае, когда одно CL-звено с подключенным к нему конденсатором будет эквивалентно (на выбранной часто-

другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис. 1). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос?

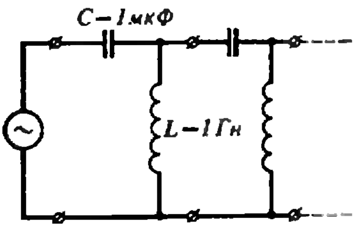


Рис. 1.

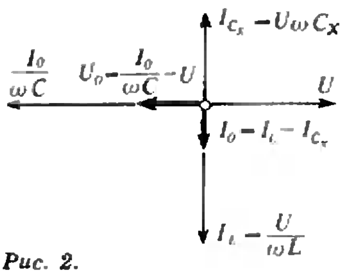
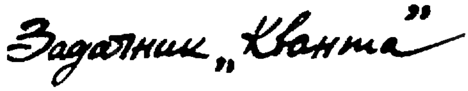


Рис. 2.



те) этому конденсатору. Построим векторную диаграмму для этого участка цепи (рис. 2).

Нарисуем вектор $\vec{U}$ — он изобразит напряжение на C_x. Теперь можно нарисовать векторы токов через L и C_x (они направлены противоположно) и суммарный ток I_0 — он течет от источника через конденсатор C. Затем изобразим вектор напряжения на C и, наконец, вектор суммарного напряжения на входе звена — сумму напряжений на C и C_x (разумеется, с учетом знаков).

Теперь немного арифметики:

$$I_L=U/(\omega L),\ I_{C_x}=U\omega C_x,\ I_0=U/(\omega L)-U\omega C_x,\ U_0=I_0/(\omega C)-U=I_0/(\omega C_x).$$

Связь между амплитудами напряжения и тока для всей цепи такая же, как для конденсатора C_x. Отсюда можно найти C_x, только удобнее в качестве неизвестной величины рассмотреть связанное с ней емкостное сопротивление $X=1/(\omega C_x)$. Относительно него получаем уравнение

$$X^2-X/(\omega C)+L/C=0,$$

откуда

$$X=1/(2\omega C)\pm\sqrt{1/(4\omega^2C^2)-L/C}=1/(\omega C)\,(0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-\omega^2LC}),$$

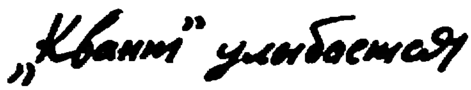
$$X_1=1/(1{,}25\omega C),\ X_2=1/(9\omega C),$$

$$C_{x1}=1{,}125C,\ C_{x2}=9C.$$

Видно, что возможны два ответа — два значения емкости, удовлетворяющие условию задачи. Конечно, результат этот неочевиден и нуждается в проверке. Можно, например, построить векторные диаграммы для полученных конкретных значений и убедиться, что все в порядке. Я это сделал — и убедился, попробуйте и вы.

И еще: бесконечная цепь, составленная из резисторов, имеет вполне определенное сопротивление — там не может быть нескольких ответов.

А. Зильберман



Теорема о крокодиле

Теорема. Крокодил более длинный, чем широкий.

Лемма 1. Крокодил более длинный, чем зеленый.

Доказательство Леммы 1. Посмотрим на крокодила сверху. Он длинный и зеленый. Теперь посмотрим на крокодила снизу. Он длинный, но не везде зеленый (брюхо у него белое). Значит, крокодил более длинный, чем зеленый. Лемма доказана.

Лемма 2. Крокодил более зеленый, чем широкий.

Доказательство Леммы 2. Посмотрим на крокодила сверху. Он зеленый и в длину, и в ширину. А широкий он только в ширину.

Доказательство с других точек зрения аналогично. Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы. Согласно лемме 1 крокодил более длинный, чем зеленый, а по лемме 2 — более зеленый, чем широкий. Поэтому крокодил более длинный, чем широкий. ЧТД.

Прислал В. Сергеев (теорема доказана на «матбое» командой с. ш. № 109 г. Омска)

Фирма BORLAND поможет Вам выйти на передний край современной информатики и быть полностью готовым к любым неожиданностям!

В сегодняшнем мире производство программ превратилось в самостоятельную отрасль промышленности с огромным оборотом. В индустрии программного обеспечения заняты сотни тысяч высококвалифицированных специалистов. Одной из самых известных корпораций в области создания программных средств является фирма Borland International Inc. (в дальнейшем — просто Борланд). Она была основана в США молодым и талантливым ученым-предпринимателем Филипом Каном в 1983 году. Единственным программным продуктом, представленным фирмой в то время, был компилятор языка программирования Паскаль, который получил коммерческое наименование Турбо Паскаль.

В основу первой фирменной версии одного из наиболее популярных языков программирования были положены простые принципы, отличающие любую высококачественную продукцию: эффективность, надежность, удобство в эксплуатации. Кроме того, ошеломляющей новостью для конкурентов Борланд явилась чрезвычайно низкая цена продукта, которая составляла не более однодневного заработка среднего программиста в США.

«Турбо» — это интеграция в едином продукте наиболее важных для программиста средств и инструментов, выполненных на одинаково высоком уровне, в едином стиле, к тому же — с прекрасно написанной, простой и ясной документацией, и это сделало Турбо Паскаль самым распространенным языком программирования для ПЭВМ, совместимых с IBM PC. За короткое время обладателями программного комплекса Турбо Паскаль стали более миллиона пользователей, причем во многих случаях этот профессиональный программный инструмент приобретался на личные средства, а многие фирмы начали поспешно воспроизводить в своих программных продуктах принципы организации рабочего места пользователя и программиста, которые были впервые предложены именно Борланд.

Постоянно вкладывая огромные средства в научные исследования и пионерные разработки, в 1984—1988 годах коллектив разработчиков фирмы Борланд резко расширил номенклатуру поставляемых средств и продуктов.

На сегодняшний день Борланд является всемирно известным поставщиком целого семейства программ, которые отличают концептуальная новизна и высокое техническое совершенство. Деятельность фирмы можно условно разделить на два направления:

— производство инструментальных средств («средств производства») для программистов: компиляторы, средства для отладки программ, другие инструменты для разработчиков;

— производство программных средств для конечных пользователей: электронные таблицы, системы управления базами данных, средства автоматизации оффиса, текстпроцессоры.

К наиболее популярным продуктам Борланд на сегодняшний день относятся:

Для программистов

— Turbo Assembler/Debugger;

— Turbo C/Professional (2.0 и C++);

— Turbo Pascal/Professional (5.5);

— Turbo Pascal Toolboxes;

— Paradox Engine и многое, многое другое;

Для пользователей — непрограммистов

— система ведения электронных таблиц и графического отображения данных Quattro 1.0/Quattro Pro;

— системы управления базами данных Paradox 3.5, Paradox 386 (v. 2.0), Paradox OS/2 (v. 2.0);

— средство для автоматизации рабочих мест управленческого персонала Sidekick Plus;

— текстовый процессор Sprint;

— средства контроля правописания Turbo Lightning (с программным интерфейсом) и Lightning Word Wizard;

— инструмент для научных, инженерных и финансовых расчетов Eureka: The Solver;

— система ведения плоских файлов Reflex 2.0.

Долгое время Борланд не имел представительства в СССР. С июня 1990 года интересы фирмы в нашей стране представляет совместное предприятие Интерквадро. Сотрудники Интерквадро прилагают все силы для успешного распространения и обслуживания на отечественном рынке инновационной, технологически лидирующей продукции Борланд и готовы оказать содействие любой организации, желающей приобрести ее!

Не забывайте: программы Борланд содержат наивысшие достижения инженерной мысли в области программирования, распространяются со скоростью компьютерных вирусов и продаются по цене компьютерных игр!

За справками обращаться:
СП «ИНТЕРКВАДРО»
Москва, 125130,
2-й Новоподмосковный пер., д. 4
телефон 150-92-01,
телекс 41 3560,
телетайп 207321,
телефакс 9430059
Официальный партнер фирмы BORLAND в СССР

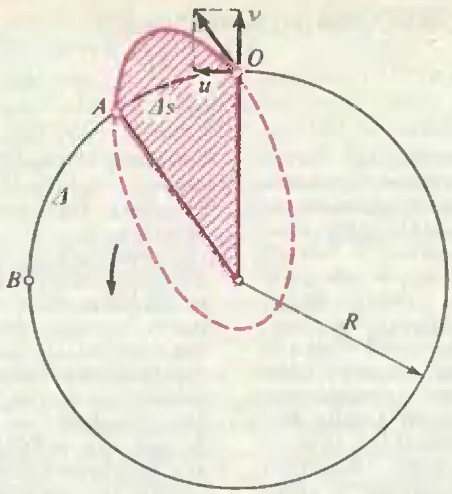
Нам пишут

Еще раз о трудной задаче

В восьмом номере «Кванта» за 1989 год опубликована статья В. Бронштэна «Трудная задача», повествующая о задаче, которая имеет трехвековую историю: куда упадет снаряд, выпущенный из орудия вертикально вверх. В статье автор приводит свое приближенное решение для случая, когда начальная скорость снаряда равна первой космической скорости. Однако представляет интерес нахождение решения и для произвольной начальной скорости снаряда. Попытаемся это сделать.

К сожалению, строгое решение задачи требует знания законов, выходящих за рамки школьной программы (их можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Механика»). Поэтому здесь мы приведем лишь основные идеи решения и конечный результат.

1) Относительно центра Земли снаряд после выстрела движется по эллипсу, все параметры которого определяются следующими условиями: начальной скоростью снаряда v, линейной скоростью вращения Земли u, ее радиусом R и ускорением свободного падения g. Траектория полета показана на рисунке.



Из уравнения эллипса можно найти точку A, в которой снаряд коснется земной поверхности, и соответствующую величину смещения $OA = \Delta s$.

2) Земля не остается неподвижной, и за время полета снаряда орудие сместится из точки O в точку B. Определив «заметенную» (заштрихованную на рисунке) площадь, при помощи второго закона Кеплера найдем это время, точку B и расстояние OB, «пройденное» орудием.

3) Искомое смещение снаряда относительно Земли составляет

$$\Delta = OB - OA.$$

В результате всех расчетов, после существенных упрощений (автор выражает признательность В. Бронштэну за предложенный вариант упрощения конечных формул) получаем

$$\Delta \approx \frac{\pi g u R^2}{(2Rg-(v^2+u^2))^{3/2}}.$$

В качестве примера найдем Δ для случая $v = 8000$ м/с (т. е. для первой космической скорости): $\Delta \approx 1226$ км (в статье Бронштэна ≈ 1210 км).

Заметим, что полученное нами решение справедливо не только для вертикальных выстрелов, но и для выстрелов под любым углом α к горизонту. При этом нужно лишь заменить v на $v \sin\alpha$, а u — на $v \cos\alpha + u$.

Е. Мищенко

Вниманию наших читателей

(Начало см. на с. 17)

Сборник задач по физике. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр.— 90 к.

Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.* Изд. 2-е, перераб. (Библиотечка «Квант»).— 70 к.

Имеются в наличии

Гальперин Г. А., Земляков А. Н. *Математические бильярды* (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). (Библиотечка «Квант»).— 1990.— 65 к.

Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы: Идеи и принципы квантовой физики твердого тела.*— 1989. — 25 к.

Математика для техникумов. Геометрия.— 1989.— 75 к.

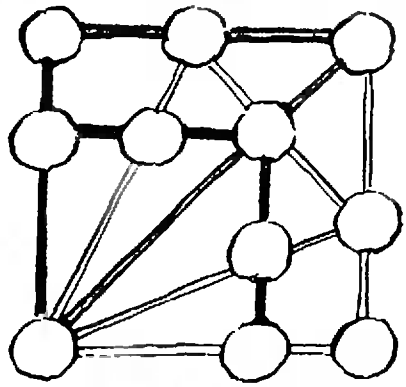
Формирование радиоэлектроники. Середина 20-х — середина 50-х гг. Радиоэлектроника в ее историческом развитии.— 1988.— 3 р. 30 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».

Задачи

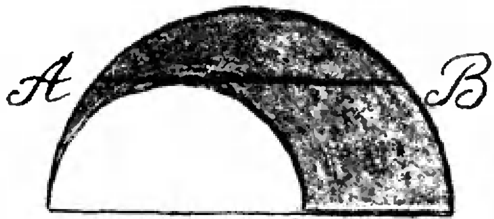
1. Из двух одинаковых железных проволок кузнец сковал по одной цепи. Первая содержит 80 одинаковых звеньев, а вторая — 100. Каждое звено первой цепи на 5 грамм тяжелее каждого звена второй цепи. Какова была масса каждой проволоки?

2. Покажите, что если выражение $3a+4b+5c$ при некоторых целых значениях a, b и c делится на 11, то и выражение $9a+b+4c$ при этих значениях a, b и c также делится на 11.



3. Расставьте в кружках рисунка числа от 1 до 11 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из десяти отрезков была одна и та же.

4. Отрезок AB параллелен обоим диаметрам двух полукругов, расположенных, как показано на рисунке, касается меньшего полукруга и равен 24 см. Чему равна площадь фигуры, окрашенной в красный цвет?



5. Два приятеля пришли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. При этом цены всех котов и всех мешков попарно различны. Покажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.

Эти задачи нам предложили А. Савин, П. Антонович, М. Варга и К. Кохась; задача 4 взята из американского журнала «Mathematics Teacher» (1990, № 1).

СВЕТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Кандидат педагогических наук
С. ТИХОМИРОВА

Небольшие отрывки из художественных произведений, которые приводятся в этой статье, мы предлагаем вам рассматривать как... задачи по физике. (Конечно, авторы этих произведений не думали задавать задачи. Но писатель умеет видеть.) На наш взгляд, некоторые из этих задач довольно сложны. Придется подумать. А в одном из следующих номеров журнала мы приведем наши решения.

ень вечереет, ночь близка,
Длинней с горы ложится тень,
На небе гаснут облака...
Уж поздно. Вечереет день.

Ф. Тютчев

Почему вечером тени удлиняются?

огда тень от крыши соседнего дома, падавшая на стену, покрытую в верхней своей части двумя рядами листового железа, проходит верхний ряд,— самое время идти в школу.

Ф. Искандер.
«Время по часам»

Потом неделю лили дожди, еще неделю было пасмурно, и когда мальчик пошел в школу, ориентируясь на тень от своего дома, он опоздал.

Почему мальчик опоздал? В какое время года имел место указанный эпизод?

омната, в которую вступил Иван Иванович, была совершенно темной, потому что ставни были закрыты, и солнечный луч, проходя в дыру, сделанную в ставне... и ударяясь в противоположную стену, рисовал на ней пестрый ландшафт из... крыш, деревьев и развешанного во дворе платья, все только в обращенном виде...

Н. Гоголь.
«Повесть о том, как поссорился Иван Иванович с Иваном Никифоровичем»

Объясните явление. Какой физический прибор действует на основе этого явления?

ти рельсы, сведенные далью,
Разбежались и брызнули врозь.

А. Прасолов.
«Не бросай свое сердце как жребий»

Почему кажется, что вдали рельсы сходятся?

ень начинает заметно бледнеть. Лица людей принимают страшный оттенок, тени человеческих фигур лежат на земле бледные, неясные...

Однако, пока остается тонкий серповидный ободок солнца, все еще царит впечатление сильно побледневшего дня... Но вот эта искра исчезла...

Круглое, темное, враждебное тело, точно паук, впилось в яркое солнце...

В. Короленко.
«На затмении»

Почему тени во время затмения стали «бледные, неясные»? Какую форму примет тень от шара во время частичного солнечного затмения?

каждой минутой тьма неумолимо и величественно наплывала на лунные кратеры. Казалось, что огромный бледный шар приблизился к земле и стал еще больше. Луна приобрела медный оттенок, а часть ее поверхности, которая не была еще охвачена мраком, стала пепельно-серой. Кольцо тени все больше закрывало луну — оно теперь уже заволокло более половины ее кроваво-красного диска, а багровая мгла сгущалась все больше и больше.

Г. Хаггард.
«Копи царя Соломона»

Какое явление описывается в этом отрывке? Почему луна приобрела медный оттенок?

ы идем с Ладой — моей охотничьей собакой — вдоль небольшого озерка. Вода сегодня такая, что ле-

тящий кулик и его отражение в воде были совершенно одинаковы: казалось, летели нам навстречу два кулика... Лада наметилась. Какого она выберет себе: настоящего, летящего над водой, или его отражение в воде — оба ведь схожи между собой как две капли воды. Вот бедная Лада выбирает себе отражение и, наверно думая, что сейчас поймает живого кулика, с высокого берега делает скачок и бухается в воду. А верхний, настоящий кулик улетает.

М. Пришвин. «Отражение»

Имеется ли различие между предметом и его отражением?

ак только жар усиливался, он (жрец-хранитель Высших Тайн.— *С. Т.*) спускался в свои подземные комнаты. Здесь всегда стояла ровная прохладная температура. Хорошая вентиляция освежала воздух. Дневной свет проникал, преломленный шлифованными зеркалами. Зеркала эти вращались по ходу солнца.

А. Беляев. «Последний человек из Атлантиды»

Нарисуйте систему из трех плоских зеркал, позволяющую повернуть луч света на 90°.

небе тают облака,
И, лучистая на зное,
В искрах катится река,
Словно зеркало стальное.

Ф. Тютчев

Почему поверхность воды искрится?

лодка чуть колышется,
одна средь темных вод,
И белый столб от месяца
по зыби к нам идет.

В. Брюсов. «В лодке»

Как образуется светящийся столб на воде?

квамарин считается по своему имени (аквамарин — морская вода) камнем, передающим цвет морской воды. Это не совсем так. В прозрачной его глубине есть оттенки мягкого зеленоватого цвета и бледной синевы. Но все своеобразие аквамарина заключается в том, что он ярко освещен изнутри совершенно серебряным (именно, а не белым) огнем.

К. Паустовский. «Золотая роза»

Как объяснить возникновение серебряного света в камне?

хтиандр был без очков и поэтому снизу видел поверхность моря так, как она представляется рыбам: из-под воды поверхность представлялась не плоской, а в виде конуса,— будто он находился на дне огромной воронки. Края этого конуса были окружены красной, желтой, зеленой, синей и фиолетовой каемками. За конусом расстилалась блестящая поверхность воды, в которой, как в зеркале, отражались подводные предметы: скалы, водоросли и рыбы... Ихтиандр видел над водой безногого рыбака, а в воде — только его ноги, а они снова отражались в зеркале водной поверхности. Другой рыбак погрузился в воду по плечи. И в воде показалось странное, безголовое, но четвероногое существо,

как будто двум одинаковым людям отрубили головы и поставили плечи одного человека на плечи другого.

А. Беляев.
«Человек-амфибия»

Как объяснить видимую Ихтиандром картину? Изменилось бы восприятие Ихтиандра, если бы он был в очках? Почему края конуса были окружены разноцветными каемками?

Нырни на дно,— стеной
отвесных вод
Сойдется вкруг тебя
водоворот.
Сквозь столб воды кайма
волны лазурной
Со дна тебе покажется
пурпурной.
Где ты не стой, куда
не отходи,
Все будешь в центре,
все посереди.

И.-В. Гете.
«Фауст»

Объясните явления.

Когда узнаешь ты,
как странны
В Сицилии фата-морганы,
Вопросов этих не задашь.
Там часто в воздухе стеною
Средь бела дня,
на зыбком зное
Встает обманчивый
мираж.
То это всем сплетеньем
веток
Висящий над землею сад,
То город, волн качанью
в лад
Качающийся так и этак.

И.-В. Гете.
«Фауст»

Что такое фата-моргана? Какова природа этого явления?

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 января 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс. Напоминаем вам, что первые шесть задач конкурса были опубликованы в 10-м номере нашего журнала. Еще не поздно прислать ваши решения, но их следует отправить не позднее 15 декабря 1990 года (по почтовому штемпелю).

Задачи

7. На листе клетчатой бумаги отмечено 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Двое игроков по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после хода которого образуется квадратик, закрашивает его в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасит больше квадратиков. Существует ли выигрышная стратегия у первого игрока? У второго игрока? Если да, то какая?

С. Савчев

8. В строчку записаны 1990 чисел, равных 1 или —1. Снизу между каждыми двумя числами запишем их произведение; получится новая строка, состоящая из 1989 чисел. Будем продолжать эту операцию, пока не останется строчка из одного числа. Покажите, что если в первой строке хотя бы одно число равно —1, то в полученном числовом треугольнике количество таких чисел не менее 1990.

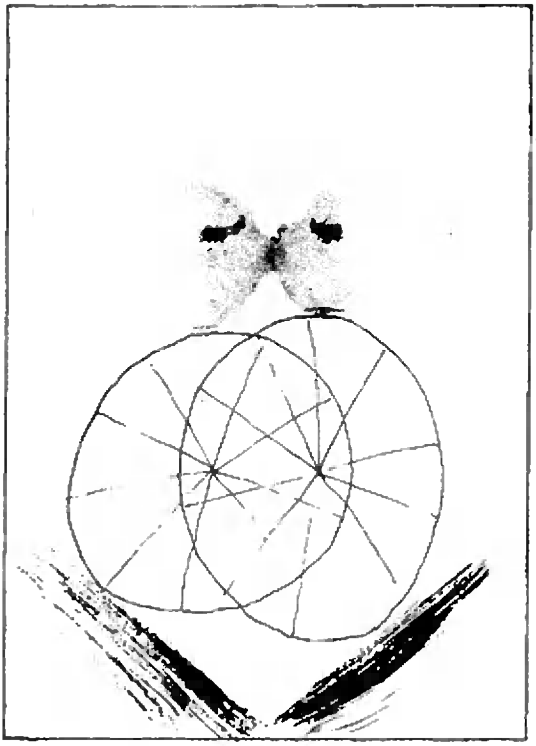
С. Савчев

9. Точка на плоскости, имеющая координаты $(a;\ b)$, соединяется отрезками с точками $(a-b;\ a)$ и $(a;\ b-a)$. Можно ли с помощью таких отрезков связать непрерывными ломаными точки

а) (19; 90) и (1990; 3383);

б) (234; 1001) и (611; 7007)?

К. Банков, С. Савчев



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Сила трения покоя» предназначена девятиклассникам, заметка «За какое время сливаются капли?» — десятиклассникам. Одиннадцатиклассникам мы советуем прочитать обе заметки.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Сила трения покоя

Как мы обычно решаем задачи по динамике? Делаем чертеж, изображаем силы и пишем уравнения второго закона Ньютона, проектируя все силы и ускорения на выбранные оси. Чтобы решить полученные уравнения, к ним необходимо добавить формулы, отражающие закономерности, которым подчиняются действующие на тела силы. Например, вместо величины силы тяжести мы подставляем mg (m — масса тела, g — ускорение свободного падения), вместо силы упругости — kx (k — жесткость, x — величина упругой деформации), силы трения скольжения — μN (μ — коэффициент трения, N — сила нормальной реакции). Еще на стадии составления чертежа мы опираемся на правила для определения направления сил: сила тяжести всегда направлена вниз, сила трения скольжения — против относительной скорости тела и поверхности и т. д.

Однако не все силы имеют свои законы. Так, силу нормальной реакции или силу натяжения нити нам удается определить только благодаря тем ограничениям, которые они накладывают на движение тел. Сила реакции, например, возникает ровно такой величины, чтобы обеспечить движение тела точно вдоль поверхности.

Аналогичными свойствами обладает и известная вам сила трения покоя. Рецепт для определения этой силы выглядит примерно так: сила трения покоя всегда имеет такие величину и направление, чтобы обеспечить покой тела относительно поверхности, по которой оно может двигаться. Эта сила иногда доставляет нам большие неприятности. Первые трудности возникают уже при изображении этой силы на чертеже. Про ее направление известно лишь одно — она направлена по касательной к поверхности. Но в какую сторону? Это не всегда ясно. Кроме того, при решении задач необходимо проверять, что получившееся значение силы трения лежит в допустимых пределах ($0 \leqslant F_{тр} \leqslant \mu N$); в противном случае начнется проскальзывание. И последнее: сила трения покоя выступает иногда в столь незнакомом обличии (например, в виде силы тяги поезда или машины), что порой бывает трудно ее даже распознать.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

1. Неподвижное тело. Пусть на тело действуют несколько сил, но при этом оно остается неподвижным. Это означает, что сила трения покоя имеет

Рис. 1.

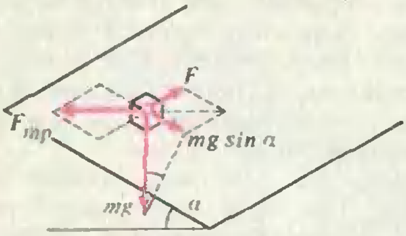


Рис. 2.

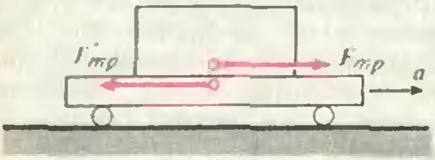


Рис. 3.

такие величину и направление, что сумма всех сил равна нулю. Какие же именно?

В простейшем случае (рис. 1) ответ очевиден: $\vec{F}_{тр}=-\vec{F}$. Если тело лежит на наклонной плоскости с углом α, *сила трения направлена вверх вдоль* плоскости и равна $F_{тр}=mg\sin\alpha$ (m — масса тела). Тело не соскальзывает в том случае, если $F_{тр}\leqslant\mu N=\mu mg\cos\alpha$, т. е. если $\operatorname{tg}\alpha\leqslant\mu$. Теперь приложим к этому телу небольшую горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости (рис. 2), *и будем увеличивать ее* модуль F. При этом $\vec{F}_{тр}$ будет изменяться как по величине, так и по направлению. Когда величина силы трения покоя $F_{тр}=\sqrt{(mg\sin\alpha)^2+F^2}$ достигнет значения $\mu N=\mu mg\cos\alpha$, начнется проскальзывание тела, причем в сторону, противоположную направлению $\vec{F}_{тр}$ в этот момент.

2. Тело на движущейся тележке. Пусть тележка разгоняется по горизонтальной плоскости с ускорением $\vec{a}$ (рис. 3). Чтобы тело массой m, находящееся на тележке, двигалось вместе с ней, сила трения покоя должна придать телу такое же ускорение $\vec{a}$, как у тележки. Таким образом, $\vec{F}_{тр}$ направлена вперед и равна $F_{тр}=ma$. Проскальзывания не будет в том случае, если $F_{тр}\leqslant\mu N=\mu mg$; если же ускорение тележки превысит величину $a_0=\mu g$, тело с нее соскользнет назад. На рисунке 3 изображена также сила трения $\vec{F}'_{тр}$, действующая на тележку со стороны тела; по третьему закону Ньютона $\vec{F}'_{тр}=-\vec{F}_{тр}$.

3. Тело на вращающейся платформе. Ускорение тела, неподвижного относительно вращающейся платформы, должно быть направлено к центру платформы. *Так как сила трения* — единственная горизонтальная сила, которая может сообщить это ускорение, она направлена к центру и равна $m\omega^2 r$ (рис. 4, *а*). Если очень медленно увеличивать угловую скорость враще*ния платформы ω, то в тот момент,* когда сила трения покоя достигнет величины $\mu N=\mu mg$, тело начнет соскальзывать с платформы. Если же платформа раскручивается быстро, то кроме центростремительного (или так называемого нормального) ускорения нужно учитывать еще одно ускорение, направленное вдоль скорости и отвечающее за изменение модуля скорости (так называемое тангенциальное ускорение, в случае медленного раскручивания мы им пренебрегли).

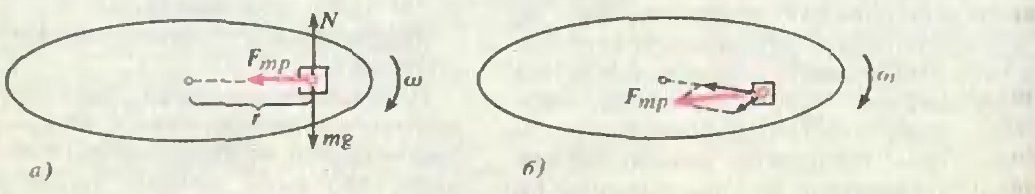


Рис. 4.

Это значит, что сила трения покоя, обеспечивающая оба эти ускорения, точнее — две составляющие ускорения (оно, конечно же, всегда одно), будет направлена не строго в сторону центра, а под некоторым углом к радиусу (рис. 4, *б*).

4. Колесо на наклонной плоскости. Пусть колесо скатывается с наклонной плоскости, но проскальзывание между колесом и плоскостью отсутствует. Это означает, что те точки колеса, которые в данный момент соприкасаются с плоскостью, являются в этот момент неподвижными. При этом сила трения покоя имеет такую величину, чтобы обеспечивать «раскручивание» колеса (рис. 5). Если бы сила трения отсутствовала, то имело бы место не скатывание колеса, а его соскальзывание — колесо двигалось бы вдоль плоскости поступательно, без вращения.

5. Разгон покоящегося автомобиля. Заметим, что сила тяги мотора, разгоняющая машину, есть не что иное, как действующая на ведущие (задние) колеса сила трения покоя. На вал машины со стороны мотора через передачу действуют силы, которые пытаются повернуть колеса по часовой стрелке (рис. 6). Препятствуя проскальзыванию, и возникает сила трения покоя, направленная вперед и приводящая в движение автомобиль.

А как насчет ведомых (передних) колес — действует ли на них сила трения покоя? Да, действует, но гораздо меньшей величины, а именно такой, которая необходима для раскручивания этих колес.

Кроме этих сил, в горизонтальном направлении действует еще сила сопротивления движению, которая состоит из двух частей: силы трения качения, связанной с деформацией поверхности колеса и с неровностями на дороге, и силы сопротивления воздуха.

6. Машина на повороте. Пусть автомобиль совершает поворот, двигаясь с постоянной по величине скоростью. Тогда ускорение машины направлено к центру закругления, перпендикулярно скорости машины.

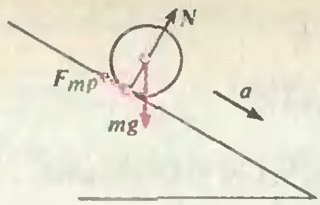


Рис. 5.

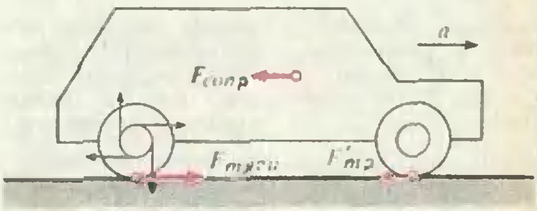


Рис. 6.

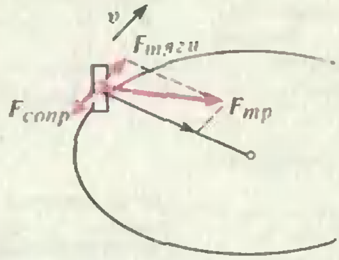


Рис. 7.

В эту же сторону направлена и сила трения покоя, действующая на колеса, которые катятся без проскальзывания. К сожалению, школьники часто принимают эту силу трения за силу трения скольжения (ведь автомобиль движется!) и направляют ее против скорости. Но тогда сразу возникает вопрос: а какая же сила создает центростремительное ускорение?

Интересно, что, кроме силы трения покоя, на машину и в самом деле действует сила сопротивления движению, направленная против скорости. Влияет ли она на силу трения покоя? В принципе влияет. Так как машина движется с постоянной скоростью, то сила сопротивления должна быть скомпенсирована такой же по величине силой тяги, т. е. дополнительной силой трения покоя, направленной вперед по ходу движения. Это значит, что результирующая сила трения покоя направлена под углом к радиусу (рис. 7): одна ее составляющая создает центростремительное ускорение, а другая — компенсирует

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Среднее гармоническое

Среднее гармоническое n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяется так:

$$M=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Если сравнить его с более известными средними — средним арифметическим

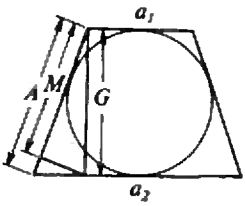
$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

и средним геометрическим

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

то оно окажется меньше каждого из них. Более точно, $A\geqslant G\geqslant M$. Равенство достигается лишь в том случае, если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны.

Это соотношение для $n=2$ красиво иллюстрируется геометрически. Рассмотрим равнобочную трапецию с основаниями a_1 и a_2, описанную вокруг окружности. (Такая трапеция, как легко видеть, всегда существует.) Тогда ее боковая сторона равна среднему арифметическому



чисел a_1 и a_2, высота — среднему геометрическому, а проекция высоты на боковую сторону — среднему гармоническому этих чисел.

С понятием «среднего» связано понятие прогрессии. Арифметическая прогрессия — та, у которой каждый член, кроме первого и последнего, является средним арифметическим соседних членов, геометрическая — средним геометрическим. Аналогично определяется гармоническая прогрессия, у которой каждый член, кроме первого и последнего, является средним гармоническим соседних с ним членов. Примером гармонической прогрессии является последовательность $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots$

Действительно, соседними с членом $1/n$ являются члены $1/(n-1)$ и $1/(n+1)$, а их среднее гармоническое равно

$$\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{\frac{1}{n+1}}}=\frac{2}{n-1+n+1}=\frac{1}{n}.$$

Сумма ее членов называется гармоническим рядом $1+1/2+1/3+1/4+\ldots$

В 1673 году великий немецкий математик, физик, философ Готфрид Вильгельм Лейбниц доказал, что эта сумма равна бесконечности, а именно, что предел частичных сумм $S_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n$ стремится к бесконечности при возрастании n.

Его рассуждения были таковы. Рассмотрим сумму n членов гармонического ряда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Каждый из них не меньше чем $1/(2n)$, следовательно, такая сумма больше чем $1/2$. Использовав это наблюдение, получаем

$$1>1/2,\ 1/2\geqslant 1/2,$$
$$1/3+1/4>1/2,$$
$$1/5+1/6+1/7+1/8>1/2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2}.$$

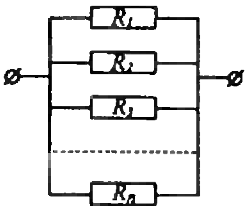
Ясно, что группируя члены ряда подобным образом, мы будем получать отрезки ряда с суммой, не меньшей $1/2$, и таких отрезков в ряду содержится бесконечно много. Любопытно, что если рассматривать лесенку из кирпичей, изображенную на рисунке, где

длина кирпича равна 2, то при величинах сдвигов кирпичей соответственно равных 1, 1/2, 1/3, ... получается устойчивая конструкция. Таким образом из нескрепленных между собой кирпичей можно создать навес сколь угодно большой протяженности. Правда, он будет очень высоким.

В 1740 году Леонард Эйлер показал, что сумма S_n растет как $\ln n$, а более точно, что существует такая постоянная C, что $S_n = \ln n + C + \varepsilon_n$, где ε_n стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности. Число $C = 0{,}57721\ldots$ называется постоянной Эйлера.

Гармонический ряд — не единственный пример гармонической прогрессии. Если два члена гармонической прогрессии заданы и, скажем, равны a и b, то третий ее член равен $\frac{ab}{2a-b}$, четвертый $\frac{ab}{3a-2b}$ и т. д., n-й член равен $\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}$.

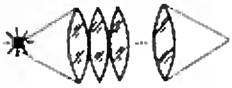
Заметим, что если записать через первые два члена a и b n-й член арифметической прогрессии, то мы получим величину $na-(n-1)b$, а для геометрической прогрессии — $\frac{a^n}{b^{n-1}}$. Нетрудно показать, что сумма членов любой гармонической прогрессии стремится к бесконечности, если ни a, ни b не равняются нулю.



Со средними гармоническими мы часто встречаемся в физике. Известно, например, что сопротивление системы из n параллельно соединенных сопротивлений R_1, R_2, ..., R_n равно

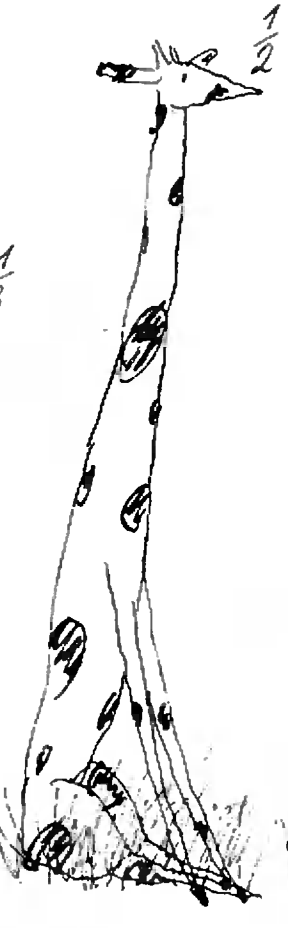
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}},$$

т. е. равно $1/n$ от их среднего гармонического.



Соответственно, фокусное расстояние системы из n тонких линз с фокусными расстояниями f_1, f_2, ..., f_n выражается точно также:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\ldots+\frac{1}{f_n}}.$$



силу сопротивления. На плохой дороге сила сопротивления может быть немалой, и этим обстоятельством пренебрегать нельзя. Ведь проскальзывание (и потеря управления!) произойдет в тот момент, когда именно эта полная сила трения покоя достигнет величины $\mu N = \mu mg$. Правда, в теоретических задачах обычно молчаливо подразумевается, что силой сопротивления можно пренебречь. Ну, а в жизни?!

А. Черноуцан

За какое время сливаются капли?

Сиживали ли вы когда-нибудь за тарелкой прозрачного куриного бульона, покрытого пятнышками золотистого жира? Если у вас при этом не было аппетита, то вы наверняка пробовали гонять эти пятнышки по тарелке, разрывая перегородки между ними или, наоборот, соединяя пятнышки воедино, наблюдая, как неспешно они сливаются, принимая форму круга.

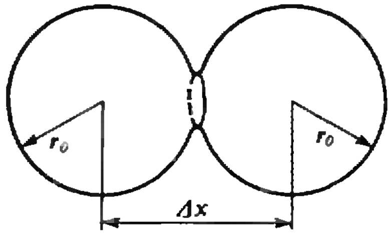
Другое наблюдение из той же серии — за слиянием капелек ртути из разбитого термометра (осторожно! занятие это — небезопасное, поскольку ртуть очень ядовита). Правда, тут вы даже не успеете моргнуть глазом, как из двух капелек образуется одна.

От чего же зависит время слияния жидких капель?

Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, поговорим немного о причине слияния капель — о поверхностном натяжении жидкости. Причем мы попробуем взглянуть на это явление с точки зрения энергетической.

Молекулы, расположенные в тонком слое жидкости вблизи поверхности, находятся в особых условиях. Дело в том, что они имеют одинаковых с ними соседей только с одной стороны поверхности, в отличие от молекул внутри жидкости, окруженных со всех сторон себе подобными. Взаимодействие молекул на не слишком малых расстояниях носит характер притяжения. Если потенциальную энергию притяжения двух молекул, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, считать равной нулю, то при меньших расстояниях эта энергия будет отрицательной. По абсолютной же величине, в первом приближении, энергию каждой молекулы можно считать пропорциональной числу ближайших соседей. Поэтому ясно, что у молекул в поверхностном слое (число соседей для которых меньше, чем в объеме) потенциальная энергия оказывается выше, чем у молекул внутри жидкости. (Еще одним фактором увеличения потенциальной энергии молекул в поверхностном слое является то, что по мере приближения к поверхности концентрация молекул падает.)

Разумеется, молекулы жидкости не неподвижны, а находятся в непрерывном тепловом движении — одни молекулы уходят с поверхности, другие, наоборот, попадают на нее. Но и в этом случае можно говорить о некоторой средней добавочной потенциальной энергии поверхностного слоя жидкости. А это означает, что для того чтобы извлечь молекулу на поверхность, внешним силам необходимо совершить некоторую положительную работу. Избыток потенциальной энергии молекул, находящихся на участке поверхности единичной площади, по сравнению с потенциальной энергией, которой обладали бы эти же молекулы в толще жидкости, называется коэффициентом поверхностного натяжения σ. Он характеризуется той работой, которую необходимо затратить на увеличение свободной поверхности жидкости на единицу площади. Конечно же, такое определение σ полностью эквивалентно известному определению коэффициента поверхностного натяжения как силы, действующей на единицу длины границы жидкости.



Известно, что из всех возможных состояний системы устойчивым является то, в котором ее потенциальная энергия минимальна. В частности, и поверхность жидкости стремится принять такую форму, при которой ее поверхностная энергия в заданных условиях будет минимальной. Так, для одной капли в условиях, когда силой тяжести можно пренебречь, энергетически наиболее выгодна сферическая форма. Для двух или нескольких касающихся друг друга капель выгоднее слиться воедино — поверхность одного большого шара меньше, чем суммарная поверхность нескольких малых шаров с той же общей массой (проверьте это самостоятельно), и, следовательно, поверхностная энергия у одной большой капли будет меньше.

Теперь мы можем вернуться к поставленному в самом начале вопросу: от чего же зависит время слияния двух капель? Над этим вопросом ученые начали задумываться довольно давно. Тем более, что он вовсе не праздный, а имеет, как оказалось, большое практическое значение. В частности — для понимания физических процессов, происходящих в порошковой металлургии, где спрессованные металлические зерна в процессе термической обработки «спекают» в вещества, обладающие уникальными свойствами. В 1944 году замечательный советский физик Я. И. Френкель предложил простейшую модель этого явления, в результате чего появилась его пионерская работа, заложившая физические основы порошковой металлургии. Основная идея этой работы и позволит нам оценить время слияния жидких капель. Для этого проще всего воспользоваться энергетическими соображениями.

Пусть две одинаковые капли в какой-то момент приходят в соприкосновение. В месте касания образуется перешеек (см. рисунок), который начинает постепенно расти и растет до тех пор, пока слияние не завершится. Что же происходит с точки зрения энергии?

Всего в «активе» у системы двух капель имеется избыточная энергия $\Delta E_п$, равная разности поверхностных энергий начального и конечного состояний, т. е. разности энергий двух отдельных капель радиусом r_0 каждая и одной общей капли радиусом r:

$$\Delta E_п = 8\pi\sigma r_0^2 - 4\pi\sigma r^2.$$

Так как при слиянии капель их полный объем не меняется, справедливо равенство

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\,\frac{4}{3}\pi r_0^3,$$

откуда получаем

$$r = r_0\sqrt[3]{2}.$$

Таким образом,

$$\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2.$$

Согласно идее Френкеля, этот избыток энергии должен быть израсходован на работу против сил вязкого трения, возникающих в процессе перемещения вещества капель при их слиянии. Попробуем оценить величину этой работы.

Для определения силы вязкого трения воспользуемся выражением, найденным в середине прошлого века английским ученым Дж. Стоксом для шара радиусом R, движущегося в жидкости со скоростью v:

$$F = 6\pi\eta R v.$$

Вошедший в эту формулу (называемую теперь формулой или законом Стокса) размерный коэффициент η называется коэффициентом вязкости или просто вязкостью. Он характеризует способность жидкости затормаживать относительное движение соседних слоев.

Понятно, что в нашем случае слияния жидких капель сила вязкого трения также может зависеть лишь от вязкости вещества капель, их линейных размеров и скорости протекания процесса слияния. Поэтому для оценки, по порядку величины, силы вязкого трения вполне допустимо использовать формулу Стокса. Только произведем в ней небольшую замену. А именно: вместо R подставим радиус наших капель r_0, вместо скорости шара v — скорость процесса слияния, обозначив его тоже через v, а под η будем понимать вязкость вещества капель. Тогда для силы вязкого трения в нашем случае получим

$$F=6\pi\eta r_0 v.$$

Заметим, что масштаб перемещения массы жидкости при слиянии капель — того же порядка, что и радиус капель: $\Delta x = r_0$. Поэтому работа сил вязкого трения будет равна

$$A=F\Delta x=6\pi\eta r_0^2 v.$$

Из полученного выражения видно, что чем быстрее сливаются капли, тем бо́льшая энергия на это требуется (из-за возрастания сил вязкого трения). Но запас энергии у нас ограничен величиной $\Delta E_п$. Этим и определяется искомое время слияния капель τ (так называемое френкелевское время слияния). Оценивая скорость процесса как $v=r_0/\tau$, из условия $A=\Delta E_п$ получаем

$$6\pi\eta r_0^2 \frac{r_0}{\tau}=4\pi\sigma(2-2^{2/3})r_0^2,$$

или

$$\tau\sim\frac{r_0\eta}{\sigma}.$$

Вот несколько примеров. Для капель воды с $r_0\sim1$ см, $\sigma\sim0{,}1$ Н/м и $\eta\sim10^{-3}$ кг/(м · с) соответствующее время составляет всего лишь $\sim10^{-4}$ с. А для значительно более вязкого глицерина с $\sigma\sim0{,}01$ Н/м и $\eta\sim1$ кг/ /(м · с) время слияния составляет уже ~1 с. Таким образом, для различных жидкостей, в зависимости от их вязкости и поверхностного натяжения, время процесса слияния капель одного и того же радиуса может меняться в весьма широких пределах. Мало того, благодаря сильной зависимости вязкости от температуры (чего нельзя сказать о коэффициенте поверхностного натяжения), это время может существенно изменяться и для одной и той же жидкости.

А. Варламов

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. К одному концу веревки, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой m. С какой силой нужно тянуть вниз за другой конец веревки, чтобы груз поднимался с ускорением a? Веревку считать идеальной (массой и растяжением веревки можно пренебречь). Какой груз нужно подвесить к свободному концу веревки, чтобы первый груз (массой m) поднимался с тем же ускорением a?

2. Шарик массой m, прикрепленный к горизонтальному резиновому шнуру, совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Длина нерастянутого резинового шнура l_0, сила натяжения шнура растет пропорционально его растяжению, жесткость шнура k. Найдите радиус окружности, по которой движется шарик, и силу натяжения шнура.

3. Два спутника движутся в одном направлении по круговым траекториям, лежащим в одной плоскости, со скоростями v_1 и v_2. Определите минимальное расстояние между спутниками. Радиус Земли R.

4. Брусок массой m находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения скольжения бруска μ. Изобразите графически зависимость силы трения от силы тяги, приложенной к бруску вдоль плоскости скольжения.

5. Какие капли дождя падают быстрее — крупные или мелкие? Почему?

10 класс

6. На рисунке 1 приведен график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Представьте этот процесс в координатах p, T и V, T. Укажите, на каком из участков процесса газ отдает тепло, на каком — получает.

7. В вертикальном цилиндре под поршнем находится кислород, масса которого равна m, а молярная масса — M. Для повышения температуры кислорода на ΔT ему было сообщено количество теплоты Q. Найдите удель-

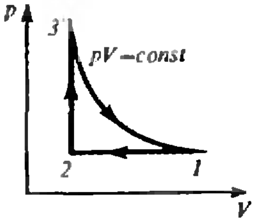


Рис. 1.

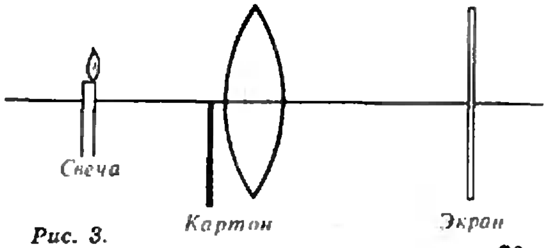


Рис. 3.

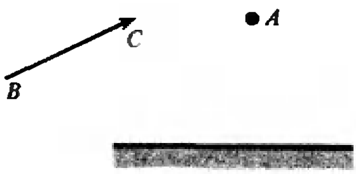


Рис. 2.

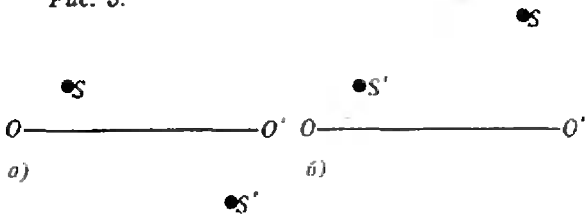


Рис. 4.

ную теплоемкость кислорода в этом процессе, работу, совершаемую газом при расширении, и увеличение его внутренней энергии.

8. В какую сумму обойдется приготовление 1 кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура равна 20 °C, фреон охлажден до температуры −10 °C. Стоимость 1 кВт·ч электроэнергии составляет 4 копейки.

9. Влажный воздух, масса которого равна m, занимает объем V при температуре T и давлении p. Давление насыщенных паров при этой температуре равно $p_н$. Определите относительную влажность воздуха.

10. В калориметр, содержащий $m_1=200$ г воды при температуре $t_1=8$ °C, погружают $m_2=300$ г льда, имеющего температуру $t_2=-20$ °C. Определите содержимое калориметра после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), льда $c_2=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг. Тепловые потери не учитывать.

11 класс

11. Определите графически, при каких положениях глаза наблюдатель может видеть в плоском зеркале конечных размеров одновременно изображение точки A и предмета BC, расположенных относительно зеркала так, как это показано на рисунке 2.

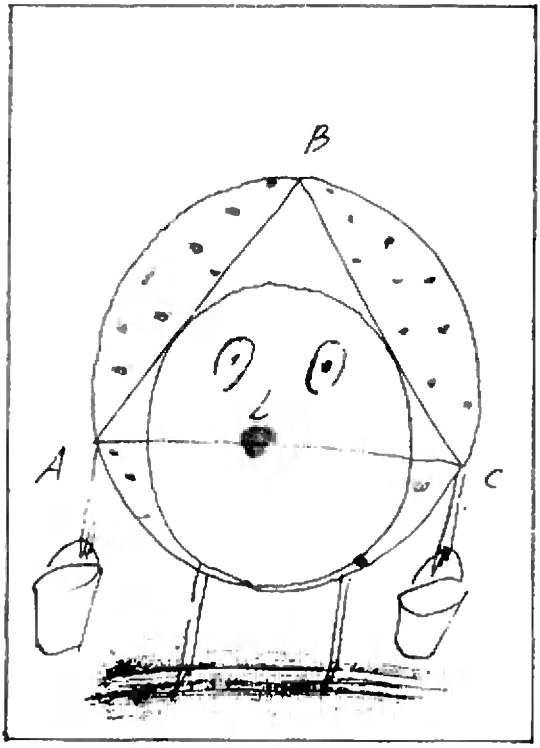
12. Точечный источник света помещен между двумя взаимно перпендикулярными плоскими зеркалами. Сколько получается изображений? Постройте их.

13. Между светящейся точкой и глазом помещается плоскопараллельная пластинка. Найдите построением кажущееся положение точки.

14. С помощью двояковыпуклой линзы получают на экране изображение свечи. Как изменится это изображение, если линзу закрыть наполовину картоном (рис. 3)?

15. На рисунке 4 (*а* и *б*) изображена светящаяся точка S и ее изображение S', даваемое линзой, оптическая ось которой OO'. Найдите положения линзы и ее фокусов.

Публикацию подготовила
В. Тихомирова



Математический кружок

Несколько задач о треугольниках и окружностях

А. ГИРИЧ

В этой заметке речь пойдет об окружностях, касающихся двух сторон треугольника и окружности, описанной вокруг этого треугольника. Такие окружности будем называть полувписанными. Мы обнаружим целый ряд интересных свойств полувписанных окружностей.

Как обычно, длины сторон треугольника ABC, противоположных вершинам A, B и C, мы обозначим через a, b и c, соответственно углы при этих вершинах — α, β и γ; радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R, площадь треугольника — S, его полупериметр — p.

Автор этой заметки — ученик 11 класса школы № 206 г. Киева.

Прежде чем приступать к изучению полувписанных окружностей, решим следующую вспомогательную задачу.

Задача 1. *Выразите радиус R описанной окружности через радиус r вписанной окружности и углы α, β, γ.*

Решение. Известны две формулы для площади треугольника

$$S=\frac{abc}{4R}=rp. \qquad (1)$$

По теореме синусов $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$. Подставляя эти выражения в (1), получаем

$$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=Rr(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

но $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, и $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$. Поэтому

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Итак, $2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4r\cos\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, откуда без труда получаем

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Задача 2. *Докажите, что радиус полувписанной окружности, касающейся сторон AB и AC треугольника ABC, равен $r/\cos^2\frac{\alpha}{2}$.*

Доказательство. Пусть r_1 — радиус, а I_1 — центр полувписанной окружности, O — центр описанной около треугольника ABC окружности (рис. 1). Тогда $OI_1=R-r_1$, $AI_1=r_1/\sin\frac{\alpha}{2}$, $OA=R$, $\cos\angle OAI_1=\cos\frac{(\beta-\gamma)}{2}$ (убедитесь в этом).

Применяя теорему косинусов к треугольнику OAI_1, получим после преобразования

$$r_1\cos^2\frac{\alpha}{2}=2R\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Поскольку $\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}=$

$$=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

правая часть равенства (2) равна $4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=r.$

Итак, $r_1=r/\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Задача 3. *Докажите, что середина I отрезка B_1C_1, где B_1 и C_1 — точки касания полувписанной окружности со сторонами AB и AC (см. рис. 1), является центром вписанной окружности треугольника ABC.*

Доказательство. Очевидно, что треугольник AB_1C_1 — равнобедренный, а треугольник AIC_1 — прямоугольный. Поэтому

$$AI=AC_1\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=r/\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Но это значит, что точка I — центр вписанной окружности.

Задача 4. *Прямая B_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника BIC.*

Доказательство. Пусть W — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной около треугольника ABC окружностью (рис. 2.) Тогда $CW=WB$, $\angle CBW=\alpha/2$, так что $\angle IBW=(\alpha+$

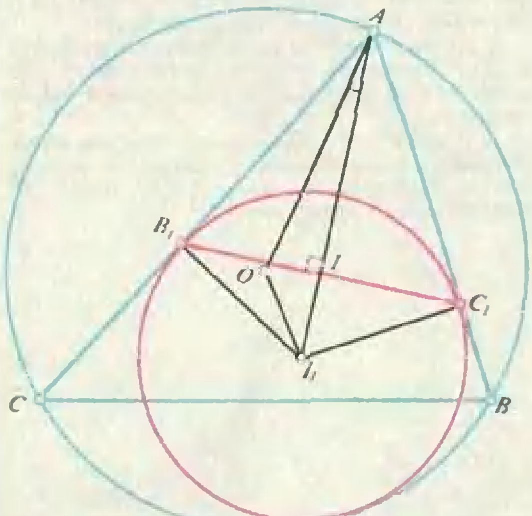


Рис. 1.

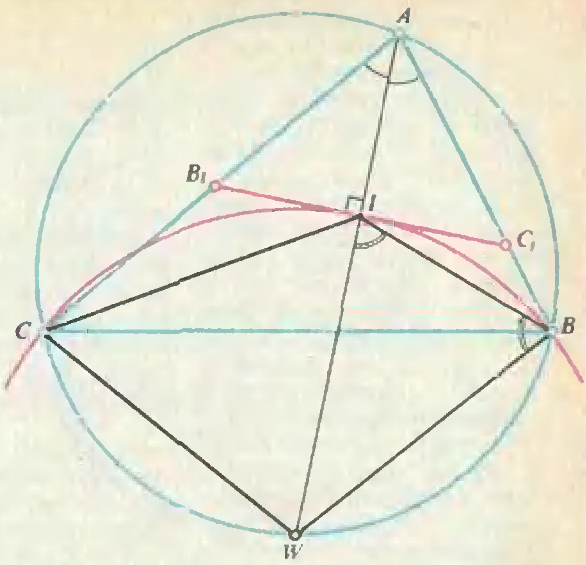


Рис. 2.

$+\beta)/2$. Кроме того, $\angle WIB=(\alpha+$ $+\beta)/2$ (как внешний угол по отношению к треугольнику AIB). Поэтому треугольник WIB — равнобедренный. Таким образом, $CW=WI=WB$, т. е. W — центр описанной около треугольника CIB окружности. Утверждение задачи следует из ранее доказанной перпендикулярности AI и B_1C_1.

Проведем теперь через вершины B и C касательные к полувписанной окружности. Пусть K — точка их пересечения, а M и N — соответствующие точки касания (рис. 3).

Задача 5. *Докажите, что прямые B_1M, C_1N, BC и AK пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть T — точка пересечения отрезков B_1M и BC (см. рис. 3). Из треугольников B_1TC и BMT получаем (по теореме синусов)

$$\frac{CT}{\sin\angle CB_1T}=\frac{CB_1}{\sin\angle B_1TC},$$

$$\frac{BT}{\sin\angle BMT}=\frac{BM}{\sin\angle BTM},$$

но $\angle B_1TC=\angle BTM$, а $\angle BMT+$ $+\angle CB_1T=\pi$ ($\angle CB_1M=\angle B_1MK$, поскольку AC и KB — касательные к одной окружности). Поэтому

$$\frac{CT}{BT}=\frac{CB_1}{BM}=\frac{CB_1}{C_1B}.$$

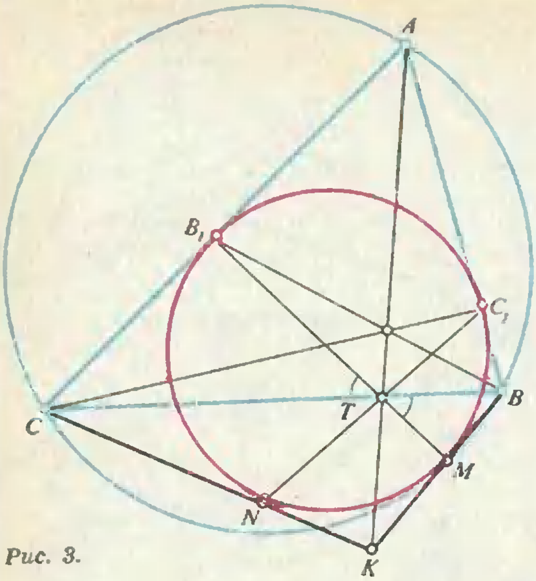


Рис. 3.

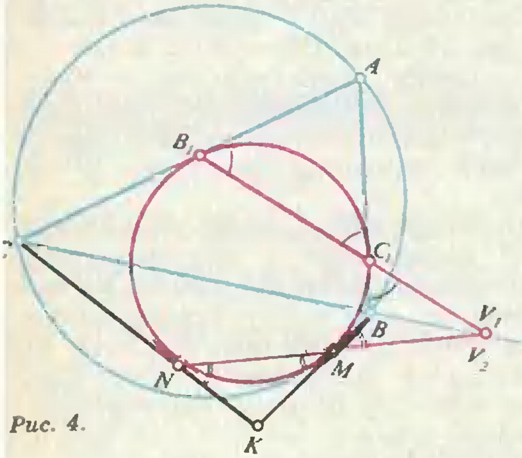


Рис. 4.

Аналогично доказывается, что прямые C_1N и AK делят отрезок BC в том же отношении. А это и значит, что все их точки пересечения с BC совпадают.

Задача 6. *Докажите, что точка пересечения прямых B_1C_1 и MN лежит на прямой BC (рис. 4).*

Доказательство. Пусть V_1 — точка пересечения B_1C_1 и BC. Из треугольников BC_1V_1 и CB_1V_1 получаем

$$\frac{BV_1}{\sin \angle BC_1V_1} = \frac{BC_1}{\sin \angle BV_1C_1}$$

и

$$\frac{CV_1}{\sin \angle CB_1V_1} = \frac{CB_1}{\sin \angle CV_1B},$$

но $\angle BC_1V_1 + \angle CB_1V_1 = 180°$. Следовательно, $\frac{BV_1}{CV_1} = \frac{BC_1}{CB_1}$. Аналогично получим (предполагая, что V_2 — точка пересечения MN с BC): $\frac{BV_2}{CV_2} = \frac{BM}{CN}$, но $BM = BC_1$, $CN = CB_1$. Итак, $\frac{BV_1}{CV_1} = \frac{BV_2}{CV_2}$, поэтому $V_1 = V_2$.

Задача 7. *Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и AK пересекаются в одной точке (см. рис. 3).*

Доказательство. Поскольку $B_1A = AC_1$, а, как было установлено ранее, $\frac{BT}{CT} = \frac{BC_1}{CB_1}$, получаем

$$\frac{BT}{CT} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Осталось воспользоваться теоремой Чевы (о теореме Чевы см. статью Б. Эрдниева и Н. Мацаева в «Кванте» № 3 за 1990 год).

В заключение предлагаем серию задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Пусть теперь A_1, A_2, B_2, C_2 — точки касания двух других (отличных от рассмотренной) полувписанных окружностей со сторонами треугольника. Докажите, что точки пересечения прямых B_1C_1 и BC, B_2A_2 и AB, A_1C_2 и AC лежат на одной прямой.
2. Пусть K_1, K_2, K_3 — точки пересечения касательных, проведенных к каждой из трех полувписанных окружностей через вершины треугольника. Докажите, что прямые AK_1, BK_2 и CK_3 пересекаются в одной точке.
3. Пусть D — точка пересечения прямых BB_2 и CC_2. Докажите, что D принадлежит медиане треугольника ABC, проведенной через вершину A.
4. Пусть P_1, P_2, P_3 — точки касания полувписанных окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AP_1, BP_2 и CP_3 пересекаются в одной точке.

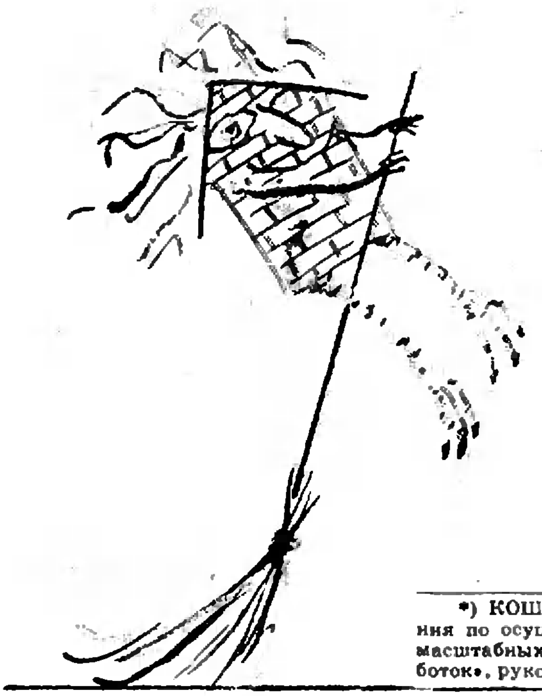
„Квант" улыбается

Магнитный мех

Архитекторам, занимающимся проблемами теплоизоляции зданий, следовало бы поучиться у природы. Теплоизоляционный слой должен находиться не с внутренней стороны стен и не в стенах, а снаружи. В этом случае кирпичная кладка, обладающая большой тепловой инерцией, будет сглаживать суточные колебания температуры внутри помещения. В идеале наружное покрытие стен должно также обладать водоотталкивающими, звукопоглощающими, декоративными и защитными свойствами. Построить мохнатое здание, однако, не так просто. Покрытие из стекловаты слишком неэлегантно, а электростатический метод, применяемый при изготовлении искусственного меха, слишком сложен. Биологи фирмы КОШМАР*) подыскивают газонную траву, которую можно было бы выращивать на стенах как своего рода растительный «мех». Но есть опасения, что трава, как и плющ, будет со временем разрушать кирпичную кладку.

По мнению Дедала, решение проблемы дает новая магнитная краска. Она представляет собой взвесь железных опилок в нитролаке. Краску наносят на поверхность и над слоем свежей краски проводят мощным магнитом. Опилки притягиваются магнитом и вытягивают за собой ниточку лака. Нить очень быстро затвердевает, и стена оказывается покрытой длинным ворсом. Такое покрытие, которому можно придать любую окраску, не только обладает прекрасными теплоизоляционными звукопоглощающими свойствами, но и очень привлекательно на вид. Зеленый домик отлично впишется в сельский пейзаж, радуя глаз колышущимся на ветру мохнатым покровом. Даже в городах «пушистые кварталы» будут выглядеть гораздо эстетичнее нынешних. Дома можно раскрашивать «под зебру», «под жирафа», изобретать любые орнаменты. И архитектура в целом обогатится новой невиданной мягкостью цветов, линий и поверхностей. Дедал также намеревается применить свое изобретение для решения более частных проблем. Нет сомнения, что огромным спросом будет пользоваться средство против облысения КОШМАР (наносится на лысину и укладывается в прическу магнитом; новые волосы держатся не хуже старых!). Подобное же средство надежно защитит полярников от холода и поможет специалистам по приматам войти в более тесный контакт с обезьянами.

Дедал догадывается, однако, что названные применения не исчерпывают всех возможностей нового покрытия. Железные опилки на кончиках волокон можно отклонять магнитным полем. Таким образом, магнитный «мех» может стать первым управляемым теплоизолятором. Теплоизоляционными свойствами мохнатого дома или махровой рубашки можно будет управлять при помощи магнитного поля, создаваемого системой электрических приводов. В жаркую погоду термостат включает ток и ворс приглаживается; в холодную погоду ворс взъерошивается и его теплоизоляционные свойства



*) КОШМАР — это «Компания по осуществлению широкомасштабных актуальных разработок», руководимая Дедалом.

улучшаются. Дом будет приспосабливаться к изменениям погоды, а владелец рубашки на собственном опыте ощутит все прелести автоматической терморегуляции, существующей у кошек и других животных. Если рубашка будет покрыта ворсом и с изнанки, то движением ворса на отдельных участках можно будет управлять со спрятанного в рукаве пульта, и владелец рубашки сможет в любой момент дистанционно почесаться там, где на людях это сделать неприлично...

Что еще более интересно, магнитные волокна могут вибрировать в переменном магнитном поле с частотой вплоть до верхней границы звукового диапазона. Рубашка-громкоговоритель со встроенным в воротник микрофоном и усилителем пригодится ораторам; по этому же принципу можно изготовить и громкоговорящие обои. Колебания магнитных ворсинок передаются воздуху за счет вязкого трения и создают однородное ненаправленное звуковое поле. Подавая на различные участки стены разные сигналы, можно добиться подлинно объемного звучания. В качестве других применений этого замечательного изобретения можно назвать магнитную зубную щетку, которая сама чистит зубы, и перистальтический ковер. В основу этого ковра вплетены управляющие провода, создающие на ворсе бегущую волну, которая уносит пыль и мелкий мусор к миниатюрному мусоросборнику. Такой ковер избавит хозяйку от многих забот, но вряд ли придется по душе кошкам.

(Из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала»)

Нам пишут

«Монстр» — брат «монстра»

В статье «У попа была собака» («Квант» № 6 за 1989 год) была опубликована целая россыпь фраз, которые что-то говорят сами о себе. Например, такая:

В этой фразе двадцать восемь букв.

Несомненно, так оно и есть. Но ведь во фразе имеются также и знаки препинания (правда, всего лишь один — точка — но тем не менее...). Поэтому имеет смысл поправить ее так:

В этой фразе тридцать восемь букв и одна точка.

Согласитесь, что теперь информация стала гораздо полнее. Но и этого мало. Слова-то в русском языке пишутся не слитно, а разделяются либо пробелами, либо знаками препинания. Посему имеет смысл еще дополнить фразу так:

В этой фразе шестьдесят две буквы, десять пробелов, две запятые и одна точка.

Правда, здесь можно спорить. Ведь пробел — это не что иное, как отсутствие буквы, поэтому получается что-то вроде парадоксального выражения «НАЛИЧИЕ ОТСУТСТВИЯ». Кроме того, подразумевает ли наличие запятой между двумя словами отсутствие пробела между словами? Трудно сказать: напечатать-то можно и так, и этак — и все будет правильно. Поэтому с пробелами, видимо, лучше не связываться.

Кроме того, можно составлять и фразы, дающие о себе не просто неверную (это было бы слишком просто!), а прямо противоположную истинной информацию:

Неправда, что в этой фразе тридцать семь букв.

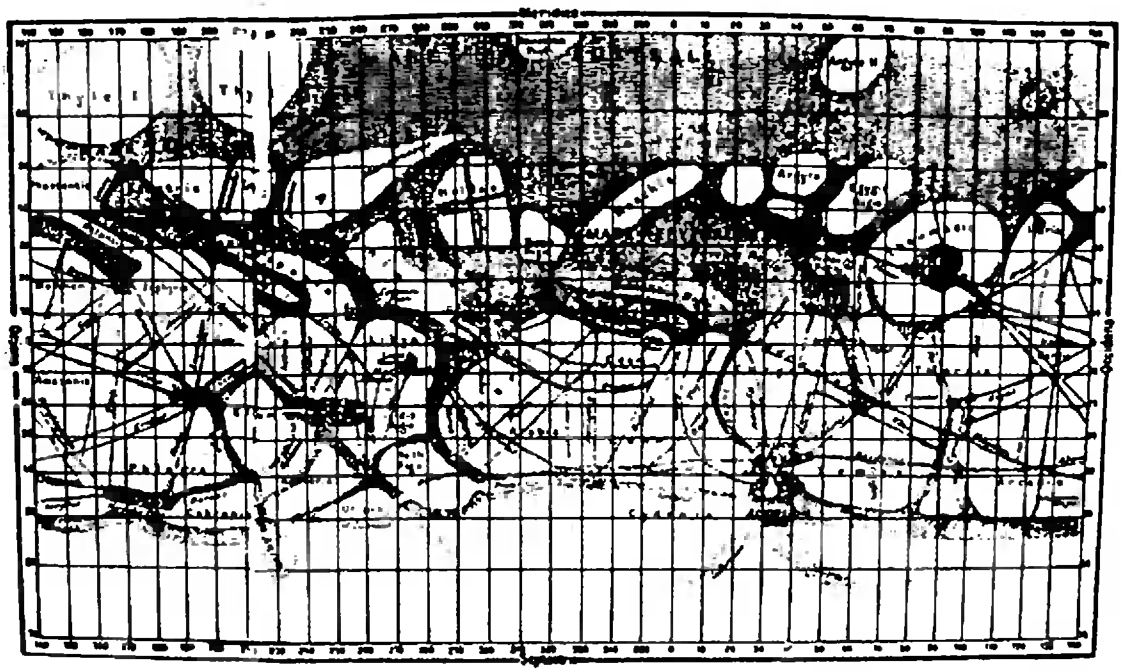
Неправда, что в этой фразе шестьдесят пять букв, а также две запятые и одна точка.

Но все это — лишь прелюдия к главному. В той фразе, которая справедливо названа в статье «монстром», также содержится не совсем полная о себе самой информация: о знаках препинания ничего не сказано. Поэтому предлагаю фразу, которая рассказывает не только о словах, но и о всех знаках пунктуации.

Фраза, которую Вы читаете, содержит:
два слова «Фраза»,
два слова «которую»,
два слова «Вы»,
два слова «читаете»,
два слова «содержит»,
двадцать пять слов «слова»,
два слова «слов»,
два слова «двоеточие»,
два слова «запятых»,
два слова «по»,
два слова «левых»,
два слова «и»,
два слова «правых»,
два слова «кавычек»,
два слова «а»,
два слова «также»,
два слова «точку»,
два слова «одно»,
два слова «одну»,
двадцать два слова «два»,
три слова «три»,
два слова «четыре»,
три слова «пять»,
четыре слова «двадцать»,
два слова «тридцать»,
одно двоеточие,
тридцать запятых,
по двадцать пять левых и правых кавычек,
а также одну точку.

Годится ли это предложение в двоюродные братья «монстру»?

И. Акулич



Ф-значит ракета

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

Технические средства

Марсианский экспедиционный комплекс (МЭК) целесообразно строить по модульному принципу, согласно которому весь комплекс разделяется на отдельные функциональные блоки, независимо и последовательно доставляемые с Земли на околоземную орбиту. В их числе жилой модуль, научный модуль, энергетический модуль, посадочный аппарат и др.

При создании МЭК и осуществлении экспедиции должны быть решены четыре основополагающие проблемы, а именно:

— выведение грузов большой массы и габаритов с Земли на низкую околоземную орбиту и сборка их на орбите;

— межорбитальная транспортировка межпланетного корабля с космонавтами на борту от Земли к Марсу и обратно;

— обеспечение безопасности экипажа на всех этапах полета экспедиционного комплекса;

— создание искусственной тяжести на борту межпланетного корабля либо разработка специальных мер предупреждения нежелательных последствий длительного пребывания в невесомости.

Указанные проблемы на сегодняшний день находятся в стадии разрешения. В СССР создана сверхмощная грузовая ракета-носитель «Энергия», грузоподъемность которой составляет около ста тонн. Аналогичная по размерности ракета-носитель «ALS» раз-

---

Продолжение. Начало см. в № 10.

рабатывается в США и будет введена в эксплуатацию к 2000 году. Не исключено, что для реализации марсианской экспедиции потребуется ракета-носитель еще большей грузоподъемности, выводящая в космос полезный груз массой 200—250 тонн. Она может представлять собой модификацию ракет-носителей баллистического типа либо являться принципиально новой разработкой. Такой перспективной транспортной системой, построенной на новых принципах, может быть космический самолет, оснащенный многорежимной двигательной установкой, совершающий горизонтальный взлет с аэродрома и посадку на нем.

Перелет с орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ) может выполняться с помощью специальных разгонно-тормозных ракетных блоков, включающих двигательные установки (ДУ) различного типа. Химические и ядерные ракетные двигатели позволяют создавать большие тяги, в то время как тяга у электрических двигателей незначительна. Зато скорость истечения реактивной струи для химических двигателей составляет 3—4 км/с, у ядерных — 10 км/с, а у электрических двигателей — 40—50 км/с, что делает их значительно эффективнее.

Следует отметить, что с целью экономии массы топлива перевод экспедиционного комплекса с межпланетной траектории на орбиту искусственного спутника Марса и Земли может выполняться путем торможения в атмосфере планет. В этом случае конструкция должна быть защищена специальным тепловым экраном.

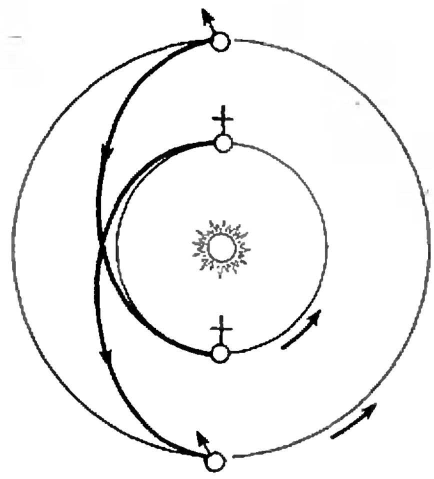
Проблема защиты экипажа на межпланетных участках полета от ионизирующих излучений и метеоритной опасности может быть решена специальными мерами — созданием убежища на борту космического корабля, введением защитных экранов и возможностью выполнения ограниченных ремонтно-восстановительных работ с целью обеспечения герметичности конструкции.

Искусственная тяжесть в жилом модуле МЭК может быть создана путем вращения всего корабля либо его отдельных отсеков. При вращении с угловой скоростью три оборота в минуту при радиусе 60 м обеспечивается искусственная гравитация $0{,}6g_0$ (g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли).

В состав экспедиционного комплекса должен входить посадочный аппарат, включающий в себя научную аппаратуру для исследований на поверхности Марса, ракету возвращения и капсулу для экипажа. Спуск аппарата с орбиты ИСМ выполняется путем торможения в атмосфере и ракетодинамического маневра на конечном участке траектории спуска с целью выбора участка посадки и обеспечения малой скорости соприкосновения с грунтом. Посадочный аппарат служит жилищем для членов экипажа в течение всего времени пребывания на поверхности планеты. После выполнения научной программы экипаж переходит в капсулу и с помощью ракеты возвращения доставляется на межпланетный корабль, вращающийся на орбите вокруг Марса.

Организация экспедиции и схемы полета

В качестве исходных положений при рассмотрении научно-инженерной за-



«Классическая» схема полета.

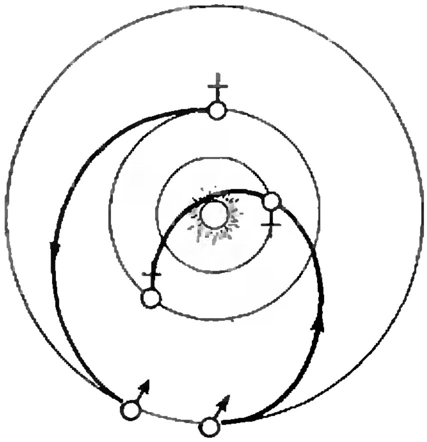


Схема полета с попутным облетом Венеры.

дачи проектирования марсианского экспедиционного комплекса могут быть приняты некоторые допущения, позволяющие классифицировать все многообразие возможных способов организации экспедиции, схем полета.

Будем считать, что формирование МЭК производится на низкой околоземной орбите путем сборки квантов полезного груза, предварительно выведенных в космос грузовыми ракетами-носителями. Сборка выполняется с борта станции, представляющей собой сборочно-монтажный орбитальный центр. После окончания формирования марсианского экспедиционного комплекса на околоземной орбите и всесторонней проверки работоспособности его системы в транспортном корабле типа «Союз» или в орбитальном самолете «Буран» на борт доставляется экипаж экспедиции. В этот же сборочно-монтажный орбитальный центр доставляется экипаж после возвращения от Марса. В этом случае межпланетный корабль производит торможение в атмосфере Земли и переводится с траектории подлета на круговую околоземную орбиту. Рассматривается также вариант возвращения экипажа на Землю в спускаемом аппарате непосредственно с траектории подлета, как это было реализовано в программе «Аполлон».

Кратко опишем некоторые характерные схемы осуществления экспедиции.

«Классическая» схема полета (минимальные энергетические затраты, но длительное время пребывания у Марса; используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

Межпланетные траектории полета представляют собой эллипсы, касательные к орбитам Земли и Марса. Время перелета между орбитами Земли и Марса около 240—280 суток. Время ожидания у Марса благоприятного положения планет для обратного полета — 330—450 суток. Длительность всей экспедиции 810—1000 суток.

Суммарные энергетические затраты — 12 км/с*), в том числе: разгон у Земли с орбиты ИСЗ — 3,8 км/с, торможение у Марса с выходом на круговую орбиту ИСМ — 2,0 км/с, разгон с орбиты ИСМ к Земле — 2,2 км/с, торможение у Земли с выходом на низкую круговую орбиту ИСЗ — 4,0 км/с.

Схема полета с попутным облетом Венеры (приемлемые энергетические затраты и малое время пребывания у Марса; используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

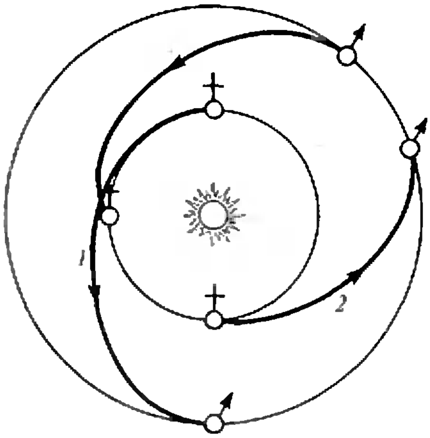
Один из участков межпланетного перелета является переходным эллипсом, другой представляет собой сочетание двух фрагментов переходных эллипсов, соединяющихся в окрестности планеты Венеры.

Время перелета от Земли к Марсу — 240 суток, время обратного полета от Марса к Венере — 185 суток, от Венеры к Земле — 145 суток. Длительность всей экспедиции — 600 суток.

Суммарные энергетические затраты — 16,2 км/с, в том числе: разгон у Земли — 4,3 км/с, торможение у Марса — 2,3 км/с, разгон с орбиты ИСМ на траекторию перелета Марс — Венера — Земля — 4,0 км/с, торможение у Земли — 5,6 км/с.

Двухкорабельная схема полета со стыковкой на орбите ИСМ (комплекс

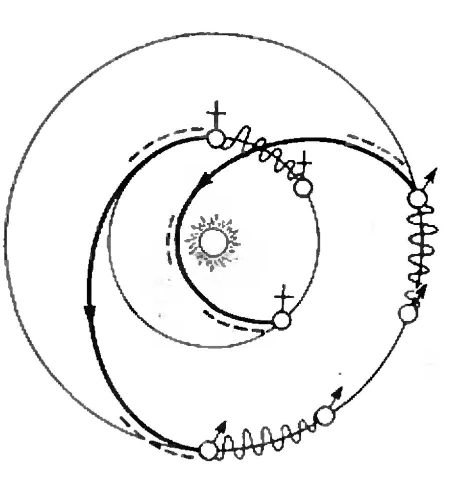
*) Изменение скорости космического аппарата всегда связано с энергетическими затратами. В связи с этим приращение скорости аппарата в результате включения двигательных установок принято называть в ракетодинамике энергетическими затратами.



Двухкорабельная схема полета.

состоит из автоматического и пилотируемого кораблей, причем автоматический совершает полет по оптимальной траектории, а пилотируемый — по «ускоренным» траекториям; схема характеризуется малым временем пребывания экипажа в космосе, требует значительных энергетических затрат, используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

От Земли к Марсу по оптимальной траектории полета отправляется грузовой корабль без экипажа, содержащий посадочный корабль и баки с топливом для обратного полета пилотируемого корабля. Время перелета автоматического корабля — 240—



Однокорабельная схема полета с использованием маршевой ДУ «малой» тяги.

280 суток при энергетических затратах 6,0 км/с.

После благополучного прибытия на орбиту ИСМ грузового корабля от Земли отправляется пилотируемый корабль, совершающий межпланетные перелеты по «ускоренным» траекториям. Пилотируемый корабль на орбите ИСМ стыкуется с грузовым кораблем. Длительность пилотируемой экспедиции равна 380 суткам. Суммарные энергетические затраты пилотируемого корабля оцениваются в 21 км/с.

Однокорабельная схема полета экспедиционного комплекса с использованием маршевой двигательной установки «малой» тяги (существенно сокращается расход топлива; необходимо включение в состав комплекса мощной энергоустановки — ядерной или солнечной).

Маневр отлета с орбиты ИСЗ на межпланетную траекторию полета к Марсу, маневр перехода на орбиту ИСМ и разгон с нее для обратного

Таблица

Схема полета; тип маршевой ДУ	Длительность экспедиции, сут.	Энергетические затраты, км/с	Ориентировочный срок осуществления экспедиции (год)	Стартовая масса (на ОИСЗ), т
«Классическая»; ЖРД	810—1000	8,0	2005	1500
С попутным облетом Венеры;				
ЖРД	600	10,0	2005	2200
ЯРД	600	10,0	2010—2015	1000
Двухкорабельная; ЯРД	400	15,0	2010—2015	2×500
С «малой» тягой; ЭРД (ЯЭУ или СЭУ)	650		2015—2020	400

Принятые обозначения:
ЖРД — жидкостный ракетный двигатель,
ЯРД — ядерный ракетный двигатель,
ЭРД — электрический ракетный двигатель,
ЯЭУ — ядерная энергоустановка,
СЭУ — солнечная энергоустановка.

полета представляют собой медленно раскручивающиеся или скручивающиеся спирали. На межпланетных участках полета двигательная установка «малой» тяги работает на участках, примыкающих к орбитам планет, а также в районе перигелия перелетной траектории. Суммарная длительность экспедиции — 650 суток. При электрической мощности энергоустановки в 10 МВт время работы ДУ составит 300 суток. Расход топлива — 600 кг/сут, тяга ЭРД — 400 Н, масса ЭЯРДУ — около 50 т. Начальное ускорение — 0,8—1,0 мм/$с^2$.

В 70—80-х годах в СССР и США были разработаны проекты марсианского экспедиционного комплекса, совершающего полет по вышеприведенным схемам. В приведенной таблице даны начальные массы МЭК на низкой опорной орбите ИСЗ при следующих исходных данных: численность экипажа — 5 человек, масса межпланетного орбитального корабля — 80 т, масса посадочного корабля — 60 т, возвращение экипажа на Землю выполняется в спускаемом аппарате с подлетной траектории.

Учеными и инженерами в настоящее время изучаются разнообразные схемы полета, отличающиеся рядом особенностей. К ним относятся:

— комбинация различных типов маршевой ДУ;

— замена ракетодинамического торможения у Марса и Земли на аэродинамическое;

— использование произведенного на поверхности Марса или его спутников топлива для обратного полета к Земле;

— дублирование числа модулей и двигательных установок для повышения надежности и безопасности полета и др.

(Окончание следует)

Заочная аэрокосмическая школа

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ) Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества (ВАКО) «Союз» проводит конкурсный набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год.

Основная цель школы — помочь в понимании физических принципов ракетостроения и космонавтики, в развитии интереса к проблемам освоения космического пространства, а также в расширении знаний по физике и математике и повышении общей эрудиции. Особенно полезным будет обучение в школе для тех, кто собирается поступать в вузы аэрокосмического профиля.

Обучение в школе — для выдержавших конкурсные вступительные экзамены — индивидуальное и бесплатное.

В течение года учащиеся Заочной аэрокосмической школы будут получать методические пособия, состоящие из двух частей. Первая часть — задание, соответствующие одному из разделов Программы школы (в том числе 6—10 вопросов и задач для проверки глубины освоения данного материала и список литературы, рекомендуемой для расширения знаний и повышения эрудиции). Вторая часть — материалы ознакомительного характера для лучшей ориентации в потоке информации по аэрофизике и исследованию космического пространства.

Кроме того, в течение года учащиеся будут получать «Космическую экспресс-информацию», составленную из наиболее значительных событий в космонавтике 1991 года.

Задания и пособия школы подготовлены квалифицированными специалистами — сотрудниками и аспирантами Московского физико-технического института, активно работающими в одном из направлений космонавтики и ракетной техники.

Программа школы состоит из шести разделов:

1) Ракетная техника.

2) Движение космических аппаратов в гравитационных полях.

3) Движение космических и летательных аппаратов в атмосфере.

4) Исследования Земли из космоса.

5) Исследования Космоса из космоса.

6) Перспективная космонавтика.

Полный курс обучения — 3 года. При условии успешного окончания обучения выпускники школы получают диплом. Учащиеся, поступающие в школу в 10 и 11 классы, имеют возможность окончить школу по сокращенной программе.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие конкурса могут стать учениками школы по платной форме обучения. Все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены после получения приемной комиссией решения вступительного задания. Кроме того, все желающие — не ученики школы — могут в течение года получать методические пособия школы за небольшую плату.

Для участия в конкурсе необходимо выполнить вступительное задание. Это задание — решение задач по физике — каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь — по одной задаче на каждом листе тетради, с сохранением порядка задач в задании.

На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом), телефон (если есть).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сообщения о себе (сведения о родителях, участие в олимпиадах, обучение в других заочных школах, членство в ВАКО «Союз» и т. п.).

Внимание: п. 4 заполнять не обязательно.

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п	
Оценка	

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом. Тетрадь с выполненным заданием вышлите простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований (с пометкой «Школа»).

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1991 года.* Вступительное задание обратно не высылается. О решении приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 мая 1991 года.

Ниже приводится вступительное задание по физике. Задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов (одиннадцатилетней школы), 4—9 — для учащихся девятых классов, 7—12 — для десятых классов. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Парашютист, выпрыгнув из корзины аэростата, находящегося на высоте $H=2$ км, в течение $t_1=30$ с падал не открывая парашюта с вертикальной скоростью $v_1=40$ м/с. Остаток пути он опускался с вертикальной скоростью $v_2=8$ м/с. Кроме того, на протяжении всего полета боковой ветер сносил его со скоростью $v_3=4$ м/с. Найдите длину траектории спуска парашютиста.

2. Две электрички, длиной $L=200$ м каждая, движутся навстречу друг другу. Скорость одной из них меньше, чем другой, и равна $v_1=40$ км/ч. Расстояние между местом встречи первых вагонов и местом расставания последних вагонов $d=40$ м. Определите скорость второй электрички.

3. В два сосуда, в каждом из которых находится $M=300$ г воды при температуре $t=80$ °С, опускают по кипятильнику. Мощность первого кипятильника вдвое больше мощности второго. Сколько воды выкипит в первом сосуде до начала кипения во втором? Удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость $c=4200$ Дж/(кг·°С).

4. В пластмассовом кубике со стороной $d=6$ см имеется полость. При полном погружении в воду кубик находится в равновесии, т. е. не тонет и не всплывает. Определите объем полости, если известно следующее соотношение между плотностями воды и пластмассы: $\rho_в=7/8\rho_п$.

5. Кольцо из медной проволоки имеет радиус $R=30$ см. Концы проволоки спаяны. Определите электрическое сопротивление между диаметрально противоположными точками кольца. Площадь поперечного сечения проволоки $S=1$ мм^2, удельное сопротивление меди $\rho=1{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

6. В калориметре находится $M=200$ г воды при температуре $t_1=5$ °С. В воду бросают $m=20$ г льда при температуре таяния льда $t_2=0$ °С. Какая температура будет в калориметре после установления теплового равновесия? Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг.

7. Троллейбус, двигаясь между остановками, сначала в течение $t_1=10$ с разгоняется с постоянным ускорением, затем в течение $t_2=100$ с движется с постоянной скоростью и, наконец, в течение $t_3=10$ с тормозит с постоянным ускорением. Движение всюду прямолинейное. Длина всего пути $L=1{,}1$ км. Определите скорость троллейбуса на участке движения с постоянной скоростью.

8. Подача теннисного мяча осуществляется с задней линии корта в горизонтальном направлении на высоте $H=2$ м. Высота сетки $h=1$ м, общая длина корта $L=20$ м. При каких скоростях подачи мяч попадет на поле противника? Сопротиалением воздуха пренебречь.

9. Два конца графитового стержня, имеющего длину $L=50$ см и площадь поперечного сечения $S=1$ мм^2, соединены с одним полюсом батареи с ЭДС $\mathscr{E}=4{,}5$ В. По стержню может перемещаться контакт, соединенный через резистор сопротивлением $R=3$ Ом со вторым полюсом батареи. Определите минимальное значение силы тока в резисторе. Удельное сопротивление графита $\rho=1{,}2\times10^{-5}$ Ом·м.

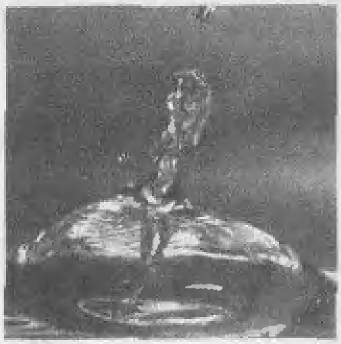
(Окончание см. на с. 73)

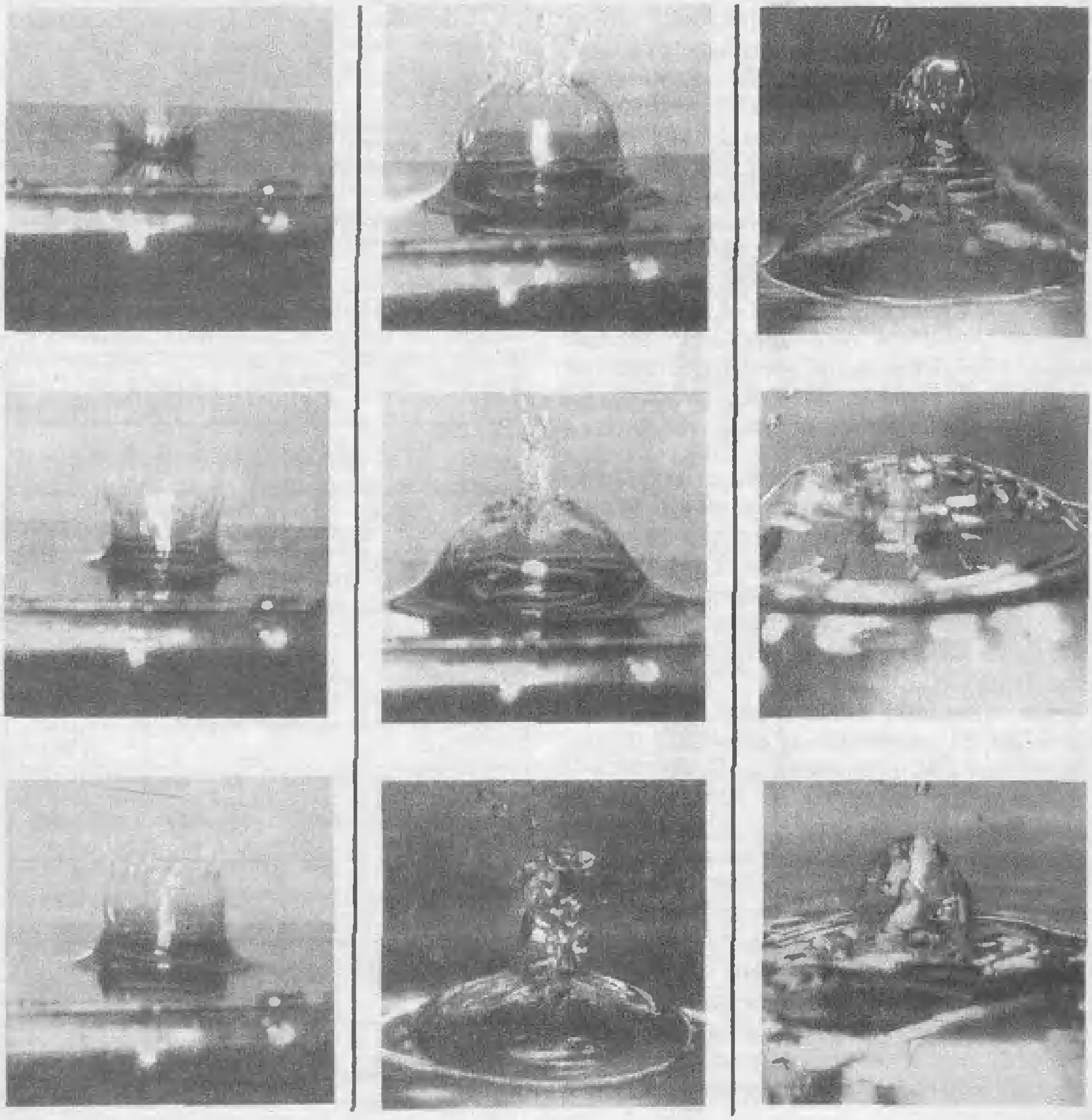
Ракурс

Падающая капля и воздушный пузырек

Фотографии, которые вы здесь видите, сделал и прислал нам в редакцию ученик средней школы № 542 при Московском инженерно-физическом институте Константин Юфряков (сейчас он уже студент).

На снимках запечатлен процесс образования воздушного пузырька при падении капли в воду. Главная проблема при фотографировании таких быстропротекающих процессов — вовремя включить фотовспышку. Автор успешно справился с этой задачей с помощью специально разработанной им установки.





Олимпиады

XXIV Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. РЕЗНИЧЕНКО

С 18 по 25 апреля в г. Ашхабаде состоялся заключительный этап XXIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В олимпиаде приняли участие 165 учащихся, представлявших команды 14 союзных республик (команда Литвы не участвовала), городов Москвы, Ленинграда, Ашхабада и физико-математических школ при университетах Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева, Еревана, Алма-Аты, Ташкента. Отметим, что команда АзССР была сформирована из двух школьников по итогам участия в конкурсе решения задач журнала «Квант».

Как обычно, участникам олимпиады было предложено на двух турах по четыре задачи. Каждая задача олимпиады оценивалась в баллах с тем расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

По итогам олимпиады дипломы I, II и III степени и грамоты были вручены 101 школьнику. В таблице 2 приведены сведения о числе призеров по каждому классу с указанием количества баллов, набранных по итогам обоих туров. Кроме того, 26 школьников были награждены специальными призами научных и общественных организаций.

В программе олимпиады, наряду с основными соревнованиями, уже второй раз для всех желающих проходил компьютерный турнир, в котором приняли участие 105 школьников, состоялся традиционный «математический бой» между участниками олимпиады и жюри.

В рамках насыщенной культурной программы, как всегда, интересно и увлекательно прошла встреча с членами редколлегии журнала «Квант».

Хочется поблагодарить хозяев олимпиады, не пожалевших времени и сил на ее организацию. Олимпиада прошла на высоком уровне. А всех ее участников мы поздравляем и желаем новых успехов.

Таблица 1

Класс \ Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
9	6	6	9	9	6	6	8	10
10	6	7	8	9	5	7	8	10
11	6	7	8	9	5	8	10	7

Таблица 2

Премия \ Класс	9	10	11
I	4 (46—59)	2 (53—57)	6 (49—60)
II	9 (34—41)	7 (39—46)	8 (41—45)
III	14 (25—31)	8 (25—31)	8 (30—33)
Грамота	9 (20—24)	14 (18—23)	12 (20—27)

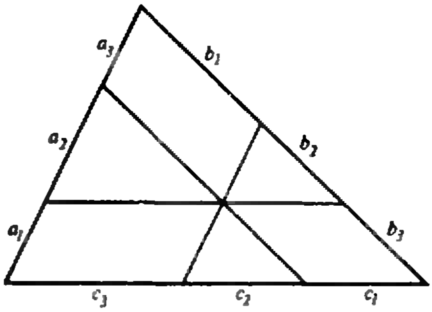
Задачи

9 класс

1. Докажите, что для любого числа t выполняется неравенство $t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$.

И. Воронович

2. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противопо-



ложных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

А. Анджанс

3*. В сенате 30 сенаторов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют. Каждый сенатор враждует ровно с шестью другими. Каждые три сенатора образуют комиссию. Найдите общее число таких комиссий, в которых все три члена попарно дружат, либо все три попарно враждуют.

Д. Фомин

4. а) Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 15 равных многоугольников, не являющихся прямоугольниками?

б) Существует ли квадрат с указанным свойством?

С. Елисеев

5. Через произвольную точку внутри треугольника проведены три прямые параллельно его сторонам. Они делят стороны на отрезки длины a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, как указано на рисунке. Докажите, что $a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$.

Б. Чиник

6. Двое играют в следующую игру. Первый называет три любые отличные от нуля числа, а второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек в выражении $*x^2+*x+*$. Первый игрок считается выигравшим, если полученный квадратный трехчлен имеет два различных рациональных корня. Докажите, что он может добиться победы.

А. Берзиньш

7. Найдите максимум выражения $|...||x_1-x_2|-x_3|-...-x_{1990}|$, где x_1, x_2, ..., x_{1990} — различные натуральные числа от 1 до 1990.

8. Правильный треугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными сторонам треугольника, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. По сторонам полученных треугольников проведена незамкнутая ломаная, проходящая через все вершины треугольников разбиения ровно по одному разу. Докажите, что имеется не менее n пар соседних звеньев ломаной, образующих между собой острый угол.

А. Берзиньш

Задачи, отмеченные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

10 класс

1. Можно ли раскрасить клетки таблицы 1990×1990 в черный и белый цвета так, чтобы симметричные относительно центра таблицы клетки были окрашены в разные цвета, а в любой строке и в любом столбце таблицы было поровну черных и белых клеток?

Н. Агаханов

2. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Д. Терёшин

3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.

Л. Купцов

4. В концах отрезка $[0;1]$ сидят два кузнечика. Внутри отрезка отмечены несколько точек. Кузнечики умеют прыгать по отрезку через отмеченные точки: положения кузнечика до прыжка и после прыжка симметричны относительно отмеченной точки, через которую прыгает кузнечик, причем разрешаются только прыжки, не выводящие из отрезка $[0;1]$. Ход состоит в том, что каждый из кузнечиков независимо от другого или прыгает, или остается на месте. За какое наименьшее число ходов кузнечики всегда могут оказаться вместе на одном из отрезков, на которые разбивают отрезок $[0;1]$ отмеченные точки?

С. Конягин

5. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001.$$

С. Резниченко

6*. На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$-угольника $A_1A_2...A_{2n}$ взяты точки K и N соответственно так, что $\angle KA_{n+2}N=\pi/(2n)$. Докажите, что NA_{n+2} биссектриса угла KNA_3.

Н. Агаханов, Д. Терёшин, Д. Фомин

7. В выпуклом многоугольнике проведены все диагонали. Каждая сторона и каждая диагональ многоугольника покрашены в один из цветов так, что не существует замкнутой ломаной с вершинами в вершинах многоугольника, у которой все звенья одного цвета. При каком наибольшем числе вершин это возможно?

А. Анджанс, Д. Флаас

8*. На плоскости заданы точка A_0 и n векторов $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, сумма которых равна $\vec{0}$. Каждая перестановка $\vec{a}_{i_1}$, ..., $\vec{a}_{i_n}$ этих векторов определяет множество точек A_1, A_2, ..., $A_n=A_0$ так, что $\vec{a}_{i_1}=\overrightarrow{A_0A_1}$, $\vec{a}_{i_2}=\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\vec{a}_{i_n}=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. Докажите, что существует перестановка, при которой все точки $A_1, ..., A_{n-1}$ лежат внутри или на сторонах некоторого угла в 60° с вершиной в точке A_0.

С. Августинович, С. Севастьянов

11 класс

1. Даны две пересекающиеся окружности, вписанные в угол с вершиной A, причем B — одна из точек пересечения этих окружностей, а C и D — точки их касания с одной стороной угла. Докажите, что прямая AB касается окружности, проходящей через точки B, C, D.

И. Шарыгин

2*. Имеется 1990 кучек, состоящих из 1, 2, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого набора кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Н. Агаханов

3. У квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ все коэффициенты положительны и $a+b+c=1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, ..., x_n$, удовлетворяющих равенству $x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n=1$, выполнено неравенство

$$f(x_1)\cdot ...\cdot f(x_n)\geqslant 1.$$

Д. Фомин

4. Куб с ребром 100 сложен из миллиона единичных кубиков, ребра которых образуют каркас. Любая тройка взаимно перпендикулярных единичных ребер с одной общей вершиной называется репером. Можно ли весь каркас разбить на реперы, не имеющие общих ребер?

А. Берзиньш

5. При каких натуральных n число

$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$$

является составным?

Д. Фомин

6*. Пусть d — наименьшее из расстояний между скрещивающимися ребрами произвольного тетраэдра, а h — наименьшая из его высот. Докажите, что $2d>h$.

А. Скопенков

7*. На доске написано уравнение

$$x^3+...x^2+...x+...=0.$$

Двое играют в следующую игру: первый называет любое число, а второй ставит его на любое из трех пустых мест; затем снова называет любое число, а второй ставит его на любое из двух оставшихся свободных мест; наконец, первый ставит любое число на последнее место. Всегда ли первый может добиться, что получившееся уравнение имело три различных целых корня?

А. Берзиньш

8. Даны $4m$ монет, из которых ровно половина являются фальшивыми. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Как не более чем на $3m$ взвешиваний на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

А. Курляндчик, Д. Фомин

XXIV Всесоюзная олимпиада по физике

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Заключительный тур Всесоюзной олимпиады школьников по физике в этом году проходил в Вологде. Собственно, олимпиаду предполагалось провести в Душанбе, но у устроителей возникли трудности, и предложение вологжан оказалось очень своевременным. Проведение Всесоюзной олимпиады всегда сопряжено с многочисленными хлопотами для организаторов на местах, и Оргкомитет очень благодарен представителям Вологды — если бы не они, олимпиада могла бы оказаться под угрозой.

В Вологду приехали команды всех республик, кроме Азербайджана и Грузии, где по разным причинам не были проведены республиканские туры олимпиады (школьники, приехавшие из Тбилиси, и некоторые другие участники выступали на олимпиаде в Вологде вне конкурса).

Торжественное открытие олимпиады состоялось 19 апреля, а 20 апреля участники уже решали задачи теоретического тура. Как обычно, в 9 классе (бывшем восьмом) давалось четыре задачи и тур продолжался четыре часа, а в 10 и 11 классах — пять задач на пять часов. Вот условия этих задач (часть их, по традиции, уже опубликована в рубрике «Задачник «Кванта»).

Теоретический тур

9 класс

1. С помощью термометра измеряют попеременно температуры жидкостей, налитых в два калориметра. Показания термометра: 80, 16, 78, 19 °С. Что покажет термометр после следующего переноса? После большого числа переносов?

2. На горизонтальной доске с коэффициентом трения μ лежит кусок мела. Доске

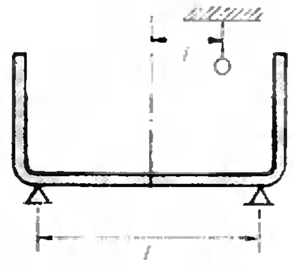


Рис. 1.

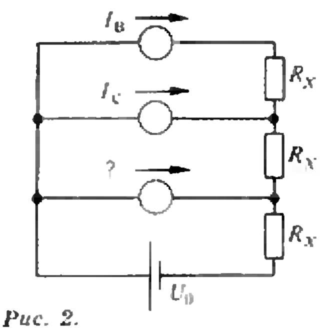


Рис. 2.

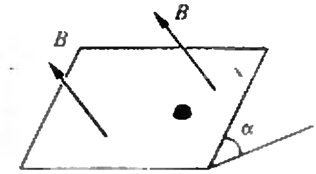


Рис. 3.

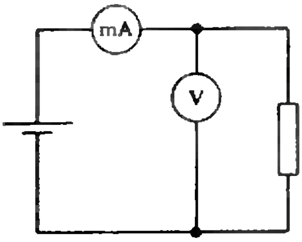


Рис. 4.

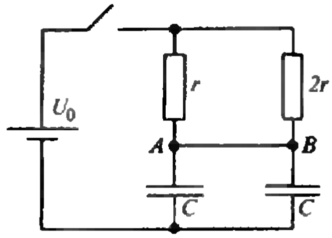


Рис. 5.

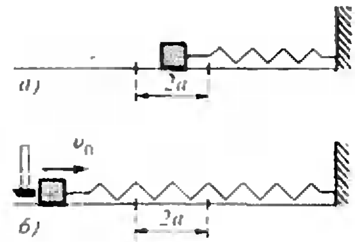


Рис. 6.

мгновенно придают горизонтальную скорость и останавливают тоже мгновенно через время t после первого толчка. Найдите длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.

3. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга (рис. 1). Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда. Силы реакции в опорах равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы в опорах? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.

4. В схеме на рисунке 2 все три амперметра одинаковые. Резисторы R_x также не отличаются друг от друга. Верхний амперметр показывает ток $I_в=1$ мА, средний — ток $I_c=4$ мА. Напряжение батарейки $U_0=4{,}5$ В. Найдите ток нижнего амперметра. Чему равно сопротивление R_x?

10 класс

1. См. задачу 3 для 9 класса.

2. В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед, и за 10 часов он достигает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей теплопроводности воды. Озеро очень глубокое.

3. На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ находится небольшая шайба массой M, на которую помещен заряд Q. Индукция однородного магнитного поля B перпендикулярна наклонной плоскости (рис. 3). Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление установившейся скорости шайбы.

4. В схеме на рисунке 4 миллиамперметр показывает ток $I=10$ мА, а вольтметр — напряжение $U=2$ В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно миллиамперметру, его показания уменьшились до $I'=2{,}5$ мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Батарейку считать идеальной.

5. В схеме на рисунке 5 емкости конденсаторов одинаковы и равны C, сопротивления резисторов r и $2r$, напряжение батарейки U_0. Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Какой заряд протек бы по перемычке, если бы между точками A и B был включен резистор сопротивлением R? Все элементы цепи считать идеальными.

11 класс

1. Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится как можно быстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?

2. Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру $-12\,°C$. При температуре в комнате $+25\,°C$ его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обращенному (холодильному) циклу, предскажите, как часто и на какое время он станет включаться, если температура в комнате понизится до $+15\,°C$. При какой максимальной температуре в комнате холодильник сможет поддерживать в камере заданную температуру?

3. См. задачу 5 для 10 класса.

4. Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0.

Затем груз расположили на горизонтальной поверхности с трением (рис. 6, *а*) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области $2a$, в которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и упругой силы пружины (так называемая зона застоя). В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза при наличии трения. Каков будет период колебаний в этом случае?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком и его скорость после удара становится равной v_0 (рис. 6, *б*). Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза? Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определите, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

5. На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размерами головы наблюдателя можете пренебречь.

22 апреля прошел экспериментальный тур. Каждому из участников было предложено по две задачи. Коротко расскажем о них.

В первой задаче для 9 класса был дан высокий прямоугольный брусок из дерева и нужно было измерить два значения коэффициента трения бруска о стол — вдоль волокон (боковая поверхность) и поперек (торец бруска). Стол наклонять не разрешалось; в оборудование входили нитка, кнопка канцелярская, заточенный карандаш и миллиметровая бумага. Задача довольно интересная, фактически это даже две задачи. Когда брусок лежит на столе, можно кнопкой прикрепить к его торцу нить и тянуть ее под углом к горизонту так, чтобы груз ехал, а его край не приподнимался. Если брусок стоит вертикально (измерение трения поперек волокон), можно толкать его острым концом карандаша — так, чтобы он ехал, но не падал. Ясно, что, найдя самую высокую из возможных точек упора, можно вычислить коэффициент трения. Размеры бруска и углы можно мерить при помощи миллиметровки. Для выбранного бруска значения коэффициента трения вдоль и поперек волокон отличались примерно на 10—15 %, точность измерений оказалась вполне достаточной для того, чтобы эту разницу уверенно определить. Такую работу можно легко поставить в школьном кабинете физики.

Во второй задаче нужно было измерять малые сопротивления. Оборудование включало миллиамперметр на 5 мА, батарейку 4,5 В, потенциометр сопротивлением 1 кОм, резисторы 2 Ом и 3 Ом — их сопротивления считались известными, резистор с неизвестным сопротивлением и кусок проволоки. Требовалось найти сопротивление неизвестного резистора (оно составляло 1 Ом) и удельное сопротивление материала проволоки (устроители не пожалели для участников олимпиады нескольких реостатов и размотали их на кусочки). Диаметр проволоки можно было измерить обычным образом — плотно намотав несколько витков на карандаш. Самое простое решение этой задачи — использование малых сопротивлений как шунтов к миллиамперметру. Включая известные резисторы поочередно, а также параллельно и последовательно друг с другом, можно проградуировать шкалу в омах и довольно точно измерять неизвестные сопротивления, которые укладываются в полученный диапазон (в этой работе так и было).

В первой задаче для 10 класса нужно было определить плотность неизвестной жидкости (чуть подкрашенный концентрированный раствор поваренной соли в воде) при помощи небольшой колбы известного объема с тонким длинным горлышком и миллиметровки. Неизвестная жидкость была налита в один большой сосуд, обычная вода — в другой. Один из способов измерения: сделать из колбочки ареометр, налив туда некоторое количество жидкости и пустив ее плавать в сосуде с водой. Количество жидкости нужно было подобрать так, чтобы над поверхностью торчало только горлышко колбы, диаметр которого легко измерить,— в этом случае можно было произвести теоретический расчет плотности. Для достижения приемлемой точности приходилось учитывать и поверхностные эффекты. В целом задача была не очень сложной, но требовала аккуратности в измерениях.

Вторая задача была сложнее. Нужно было определить зависимость от температуры обратного тока маломощного германиевого диода (диод Д9В) в диапазоне 20—70 °С. Оборудование: батарейка 4,5 В, микроамперметр на 100 мкА, конденсатор (его емкость составляла от 3,3 до 4,7 мкФ), сосуд с горячей водой, термометр, нить с грузиком для изготовления маятника, миллиметровка. В условии задачи было сказано, что обратный ток мало изменяется в диапазоне обратных напряжений от 1 до 4,5 В. Еще в условии было предупреждение о том, что вода, хотя и не очень хороший, но все же проводник. Трудность была в том, что при небольших температурах обратный ток диода составлял всего 2—3 мкА и измерить его непосредственно микроамперметром (точность которого 4 % — прибор стандартный, школьный) было невозможно. Возможный вариант — заряжать обратным током конденсатор в течение заданного отрезка времени (тут и пригодится маятник), а затем наблюдать отброс стрелки микроамперметра при подключении к нему заряженного конденсатора. При других температурах можно было менять время заряда для получения такого же отброса стрелки, при этом не нужно проверять пропорциональность отброса и протекшего заряда. Впрочем, можно установить зависимость отброса стрелки от заряда конденсатора при изменении времени заряда. Для упрощения расчетов существенно указание о постоянстве обратного тока при заданной температуре. При температурах 50—70 °С ток легко измерить непосредственно. Полученные двумя разными способами части графика можно «сшить» с учетом того, что они плавно переходят одна в другую. Нужно сказать, что мало кто из участников сделал эту задачу полностью. Большинство померили, что сумели, просто микроамперметром и сохранили в неприкосновенности конденсатор, нитку и грузик (жюри не присуждало баллов за экономию материалов и приборов!).

В первой задаче для 11 класса участнику предлагалось измерить температуру его ладоней при помощи большого сосуда с водой комнатной температуры (эта температура была известна), маленькой колбы с длинным тонким горлышком (объем колбы до риски на горлышке был задан) и миллиметровки. Один из возможных способов: нагретую в ладонях колбу опустить вниз горлышком в воду, а затем дать ей остыть и измерить количество воды, вошедшей в горлышко. Эти измерения требовали достаточной аккуратности и грамотности. Отметим, что при помощи такого простого оборудования можно довольно точно измерять небольшие разницы температур.

Вторая задача была сложнее — нужно было измерить емкость конденсатора при помощи следующего оборудования: источник переменного напряжения, частота которого участникам не была известна, миллиамперметр переменного тока на 5 мА (детекторной системы), конденсатор известной емкости, стержень из материала с большой магнитной проницаемостью (ферритовая антенна для радиоприемника), тонкий провод в изоляции для намотки катушки. Источник переменного напряжения имел довольно большое внутреннее сопротивление (о чем участникам было известно); довольно велико было и сопротивление миллиамперметра (причем у прибора детекторной системы это сопротивление сильно зависит от протекающего по нему тока — об этом многие из участников не знали). Из-за этого нельзя было воспользоваться прямыми измерениями токов в цепи с конденсаторами. Кстати, емкости конденсаторов были выбраны такими, что последовательное подключение конденсатора к миллиамперметру почти не изменяло тока в цепи. Для получения хороших результатов нужно было использовать резонанс — например, в параллельном контуре, сопротивление которого сильно возрастает на резонансной частоте. Подключив такой контур последовательно с миллиамперметром к источнику, можно было бы добиться минимального тока в цепи. Для этого следует намотать на ферритовый стержень катушку, подключить ее параллельно конденсатору и заметить число витков при резонансе. То же самое можно повторить с другим конденсатором. Дальше нужно учесть, что при использовании длинного стержня с большой магнитной проницаемостью и катушки, витки которой расположены рядом друг с другом (но не «виток к витку», а «внавал»), силовые линии поля всех витков пронизывают друг друга и магнитный поток оказывается пропорциональным квадрату числа витков катушки. Резонанс в этой цепи фиксировался довольно точно — плюс-минус один виток уже чувствовался и точность измерений получалась хорошей. Достоинство такого метода состоит в том, что миллиамперметр используется только как индикатор резонанса по минимуму тока и погрешность его шкалы не увеличивает ошибки измерений.

Проверка работ проводилась как обычно: работы теоретического тура «шифровались», при этом проверяющие не знали, чьи именно работы они оценивают; каждая из работ полностью проверялась как минимум дважды, разными членами жюри — для большей объективности. Кроме того, участникам подробно рассказывались критерии оценки задач (конечно, после тура), и они могли при необходимости апеллировать к жюри, если считали полученные ими оценки несправедливыми. Можно было апеллировать и по результатам проверки экспериментального тура.

Победители олимпиады были награждены дипломами и различными специальными призами. Специальный приз имени академика И. К. Кикоина — микрокомпьютер МК-85 — был присужден за лучшую экспериментальную работу девятикласснику из 145 школы г. Киева Николаю Ивченко. Хочется специально отметить чрезвычайно приятное событие: впервые за много лет дипломом первой степени была награждена представительница прекрасного пола — Аня Лемперт из подмосковного поселка Черноголовка, которая не только хорошо решила теоретические задачи, но и превосходно выступила в экспериментальном туре.

Хозяева олимпиады постарались как следует развлечь участников. Ребята побывали на вечерах отдыха в школах города, приняли участие в автобусной экскурсии по историческим местам области, посетили театр, смотрели концерт самодеятельности на открытии, а также развлекались сами как могли. Была и встреча с представителями редколлегии журнала «Квант», на которой к журналу были предъявлены многочисленные суровые требования (к счастью, они оказались взаимоисключающими, так что за «Квант» можно не опасаться). Приехавшие на олимпиаду студенты — сами в прошлом участники и победители всевозможных олимпиад, активно общались с ребятами, давая им множество полезных советов и рекомендаций. При этом каждый участник мог своими глазами видеть, каких прекрасных результатов можно добиться (конечно, если хорошо себя вести).

Следующую Всесоюзную олимпиаду по физике пригласил Ереван.

Мы желаем всем участникам олимпиады больших успехов!

III Всесоюзная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН,
кандидат физико-математических наук
С. РАКОВ

Отрадным является тот факт, что и олимпиада среди школьников по информатике заняла достойное место среди других олимпиад. В этом году заключительный этап III Всесоюзной олимпиады проходил с 18 по 25 апреля на Украине в г. Харькове. В олимпиаде принимали участие 87 школьников практически из всех союзных республик, а также городов Москвы, Ленинграда, города-устроителя олимпиады Харькова и МПС.

На организационном заседании жюри олимпиады, которое возглавил академик АН УССР В. Л. Рвачев, было принято принципиально новое решение о проведении двух туров олимпиады с использованием компьютеров. Это решение вызвало неоднозначную оценку среди руководителей команд. Некоторые из них утверждали, что принятый на прошлых олимпиадах порядок проведения туров (I тур — теоретический, без использования компьютеров; II тур — практический, с их использованием) позволяет, с одной стороны, уравнять шансы на победу школьников, имеющих различные возможности доступа к персональным компьютерам, а с другой стороны, выделить ребят, которые имеют хорошую теоретическую подготовку, а не быстро нажимают на клавиши. Однако большинство членов жюри и руководителей команд поддержали принятое решение. Основные доводы заключались в следующем:

— в процессе решения задач по информатике этапы формализации, разработки наилучшего алгоритма и его реализации на персональном компьютере взаимосвязаны и неотделимы друг от друга; более того, разработка алгоритма не может осуществляться без учета возможностей конкретной ЭВМ;

— техника работы за компьютером является неотъемлемой частью решения задачи по информатике;

— от школьников трудно требовать разработки новых алгоритмов, основанных на серьезном теоретическом анализе известных алгоритмов; что касается оценок предлагаемых ими алгоритмов, то проведение тура с использованием компьютеров также предполагает необходимость такого анализа;

— уровень Всесоюзных олимпиад по информатике должен соответствовать международным олимпиадам и если раньше проведение теоретического тура, равно как и введение в стране безкомпьютерного обучения информатике в средней школе, было связано с отсутствием необходимой вычислительной техники, то сейчас положение с персональными компьютерами существенно улучшилось, и в каждой республике есть все необходимые условия для подготовки своих команд с учетом названных требований;

— введение компьютерных туров нисколько не ограничивает класс предлагаемых на олимпиаде задач, так как в этом случае появляется необходимость самим школьникам определять, в какой мере они должны использовать компьютер для получения требуемого результата;

— значительно повышается уровень объективности оценок за счет использования компьютеров при проверке представленных участниками решений.

Итак, в этом году проводились оба тура с использованием персональных компьютеров. Однако в качестве компромисса жюри олимпиады приняло такое решение: при проверке работ в первом туре акцент делать на оценку предлагаемого алгоритма решения задачи, а во втором туре — на реализацию алгоритма. Этим также определялось число задач, предлагаемых на разных турах. В частности, на первом туре было предложено две задачи, на втором — одна. Приведем условия задач.

Первый тур

Т 1.1. Круг разрезан несамопересекающейся ломаной, координаты вершин которой заданы парами натуральных чисел $(X_1;\ Y_1),\ldots$ $\ldots,(X_k;\ Y_k)$. Первая и последняя вершины лежат на границе круга, а остальные — внутри него. Определить, можно ли разъединить две получившиеся части круга (выход из плоскости не допускается).

П. Панков

Т 1.2. Какое минимальное количество одинаковых $(P,\ Q)$-коней требуется для контроля:

а) ограниченной шахматной доски размером $M\times N$ клеток;

б) бесконечной полосы шириной M клеток;

в) бесконечной плоскости?

Примечание 1. (P, Q)-конь — фигура, которая за один ход перемещается на P клеток по горизонтали и Q клеток по вертикали или на P клеток по вертикали и Q клеток по горизонтали. Например, (1, 2)-конь — это обычный шахматный конь.

Примечание 2. Фигура или группа фигур контролирует поле, если каждая клетка поля доступна за один или несколько ходов хотя бы одной фигуре. Например, для контроля стандартной доски размером 8×8 требуется два (1, 1)-коня.

Я. Зайдельман

Второй тур

Т 2. Обозначим

$$S(N,\ a,\ b)=\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{a^{[\log_b k]}},$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}x_k=x_1+x_2+\ldots+x_N,$$

$[\log_b k]$ означает целую часть $\log_b k$, через $\log_b k$ обозначено такое число z, что $b^z=k$.

Требуется составить программу, которая выводит с возможно большим числом верных десятичных знаков:

а) $S(100,\ 3,\ 2)$;

б) $S(100,\ 3,\ 1.9)$;

в) $S(100,\ 3.1,\ 1.9)$.

В. Прохоров

Перед каждым туром жюри олимпиады осуществляло выбор задач из пакета, представленного методической комиссией по информатике Гособразования СССР. Читателям журнала будет небезынтересно узнать, какие еще задачи рассматривало жюри. Вот эти задачи.

Задачи для первого тура

1. *Палиндромом* называют последовательность некоторых символов, которая читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Предложите алгоритм, позволяющий в заданной строке найти подстроку-палиндром максимальной длины.

В. Бардадым

2. Задана последовательность длины N, состоящая из единиц и нулей. Определить количество M-значных двоичных чисел ($M\leqslant N$), входящих в указанную последовательность, которые делятся на 21.

В. Бардадым

3. Вершины и стороны N-угольника помечены натуральными числами от 1 до $2N$. Если суммы трех чисел, соответствующих каждой стороне, равны, то N-угольник называется *магическим*. Требуется:

а) для заданного натурального N сформировать хотя бы один магический N-угольник;

б) для заданного натурального N сформировать возможно большее число магических N-угольников.

А. Раков

Задачи для второго тура

1. Скала имеет форму тела вращения. Ее основание лежит на плоскости xOy. Каждое звено образуется частью конической поверхности. Гору завершает плато. Требуется написать программу, которая вычисляет кратчайший путь от точки A при основании скалы до точки B на плато. Программа должна проложить маршрут в ответ на вводимые данные:

координаты точек A и B;

количество звеньев N;

радиусы R_i $(i=1,\ldots,N)$ при основании каждого звена;

длины L_i $(i=1,\ldots,N)$ образующих каждого звена.

Радиусы R_i строго монотонно убывают с ростом i. Выполнены соотношения: $L_i\geqslant R_i-R_{i+1}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$; $R_{N+1}=0$; $L_N=R_N$ (N-е звено образует плато). Для каждого звена указывается, куда направлен склон — в гору или под гору — при движении к оси скалы.

Н. Красовский

2. Папа Карло собрал Буратино трехколесный велосипед. Не умея делать круглые колеса, он выпилил их их дерева в виде многоугольников. Заметим, что задние колеса велосипеда жестко закреплены на оси. Буратино взял велосипед и отправился к Мальвине по ровной дороге.

Для исходного положения колес требуется определить:

а) угловую амплитуду (в радианах) качания при езде оси задних колес относительно дороги;

б) как следует повернуть на оси одно заднее колесо относительно другого, чтобы амплитуда этого качания была минимальной;

в) угловую амплитуду качания перекладины, соединяющей переднюю ось с серединой задней, при езде на велосипеде, у которого задняя ось с колесами — конструкция, симметричная относительно плоскости, перпендикулярной оси в ее середине.

Многоугольники колес задаются координатами своих вершин в произвольном порядке. Также задаются расстояние между задними колесами и длина перекладины, упомянутой в пункте (в).

В. Прохоров

Следует отметить заслуги организаторов олимпиады, обеспечивших школьников необходимыми персональными компьютерами и программами. В частности, всем, кто пожелал работать на IBM PC, были предоставлены эти персональные компьютеры. Остальные работали на «Ямахах».

Каждый тур олимпиады жюри оценивало исходя из 100 баллов. При этом первая задача первого тура оценивалась из 40 баллов, а вторая — из 60.

Указания к решениям задач и критерии оценки, составленные авторами задач, приведены в конце журнала.

После проверки членами жюри задач обоих туров проводился их разбор авторами, а затем рассматривались апелляции. На прошлых олимпиадах этот процесс проходил достаточно спокойно. В этом году под воздействием некоторых руководителей команд разбор апелляций принял лавинообразный характер. Практически все участники, пытаясь любой ценой повысить себе оценки, начали апеллировать к жюри. Большое количество апелляций существенно усложнило работу комиссии. На будущее, чтобы этого не возникало, необходимо при разборе задач достаточно подробно излагать и критерии оценки.

Закрытие III Всесоюзной олимпиады по информатике состоялось во Дворце пионеров им. П. П. Постышева. Дипломы I степени получили 6 школьников (они набрали 98—115 баллов), дипломы II степени — 11 (60—85 баллов), дипломы III степени — 14 школьников (48—58 баллов).

Многие школьники были награждены призами общественных, научных организаций и спонсоров олимпиады — НТТМ «Поиск». В частности, за лучшее решение первой задачи I тура призы получили Ю. Зайцев (Киев, с. ш. № 57, 11 класс), Т. Докшицер (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.) и Л. Нетрошвили (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.).

За лучшее решение второй задачи I тура приз получил Г. Еськов (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.). За лучшее решение задачи II тура — О. Таборовец (Пинск, с. ш. № 4, 11 кл.).

Жюри олимпиады приняло также решение о дополнительном включении в состав кандидатов в сборную СССР для участия во II Международной олимпиаде по информатике А. Демакова (Кировская обл., Даровская с. ш.) и Г. Еськова. Более того, призеры олимпиады, которые не оканчивают школу в этом году, включены в состав кандидатов для подготовки к участию в III Международной олимпиаде по информатике, которая состоится в 1991 году в Греции.

III Всесоюзная олимпиада по информатике подвела итоги олимпиадного движения по этому предмету в нашей стране в 1990 году. Говорить об установившихся формах проведения этих олимпиад еще рано — достаточно еще проблем в методическом, организационном и техническом обеспечении. Однако имеющаяся тенденция вселяет определенную уверенность в ее будущее. Хочется надеяться, что эта олимпиада явилась важным шагом на пути формирования профессиональных навыков всех ее участников. Желаем им успехов в этом трудном деле!

Призеры XXIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Амбайнис А. (Даугавпилс, с. ш. № 12),
Галванс А. (Олайне, с. ш. № 1),
Каукис В. (Рига, с. ш. № 1),
Некрашевич В. (с. Крутые Горы Киевской обл., с. ш.);

по 10 классам —
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239),
Перлин А. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 11 классам —
Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Пихурко О. (Нестеров Львовской обл., с. ш. № 1),
Симановскис Р. (Рига, с. ш. № 1),
Смотровс Ю. (Рига, с. ш. № 1),
Стояновский А. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Аншмитс У. (Рига, с. ш. № 1),
Аринкин Д. (Харьков, с. ш. № 132),
Бородин А. (Донецк, с. ш. № 17),
Бурков А. (Киров, с. ш. № 35),
Гельбанд М. (Одесса, с. ш. № 100),
Изместьев И. (Киров, с. ш. № 35),
Кожевников П. (Калуга, с. ш. № 24),
Певцова Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фельдман К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Андерсонс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Волченко К. (Донецк, с. ш. № 17),
Жуховицкий В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Козачко А. (Винница, с. ш. № 6),
Мишачев К. (Липецк, с. ш. № 14),
Мучник Р. (Винница, с. ш. № 17),
Янсонс М. (Сигулда, с. ш. № 1);

по 11 классам —
Барановский В. (Омск, с. ш. № 105),
Городецкий А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Зарубин Н. (Харьков, с. ш. № 27),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Пионтковский Д. (Тула, с. ш. № 13),
Разин М. (Запорожье, с. ш. № 28),
Соловьев И. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Шабес Д. (Минск, с. ш. № 13).

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Аманов М. (Ташауз, ФМШ),
Белоус Ю. (Нижний Тагил, с. ш. № 9),
Виллемсон Я. (Тарту, с. ш. № 12),
Григорян В. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Дмитриев А. (Грозный, с. ш. № 41),
Климов С. (Ижевск, с. ш. № 30),
Лапин П. (Гусев, с. ш. № 2),
Лебедев А. (Краснодар, с. ш. № 4),
Лимонин С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Номировский Д. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Наумович А. (Минск, с. ш. № 19),
Рымов А. (Алма-Ата, РФМШ),
Стучинина С. (Москва, с. ш. № 2),
Шеенков М. (Иваново, с. ш. № 36);

по 10 классам —
Андреевс Ю. (Рига, с. ш. № 25),
Балашов О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бродский Н. (Челябинск, с. ш. № 31),
Днестранский А. (Рязань, с. ш. № 2),
Комаров Д. (Саранск, с. ш. № 4),
Рябичева О. (Киров, с. ш. № 8),
Страусс У. (Рига, с. ш. № 1),
Темкин М. (Москва, с. ш. № 57);

по 11 классам —
Бачурин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Безрукавников Р. (Москва, с. ш. № 57),
Милтузис А. (Екабпилс, с. ш. № 1),
Можей Н. (Минск, с. ш. № 10),
Потапов С. (Тамбов, с. ш. № 14),
Селищев И. (УССР, Манчевская с. ш.),
Скадиньш Р. (Латвия, Скайсткалтская с. ш.),
Тихонов С. (Воронеж, с. ш. № 58).

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Фролов А. (Москва, с. ш. № 303),
Чистый А. (Брест, с. ш. № 1),
Штенко Т. (Мариуполь, с. ш. № 41);

по 10 классам —
Башинский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Джосюк С. (Винница, с. ш. № 17),
Литвак А. (Горький, с. ш. № 40),
Ляпин А. (Нальчик, с. ш. № 9),
Полищук И. (Москва, с. ш. № 1121),
Тамошюнас В. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Шурупов К. (Куйбышев, с. ш. № 63);

по 11 классам —
Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Лебединский П. (Алма-Ата, РФМШ),
Лемперт А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Матюнин Ю. (Вольск, с. ш. № 11),
Шеянов В. (Ленинград, с. ш. № 566).

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Болдырев С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 36),
Ганноха А. (Киев, с. ш. № 61),
Гращенко А. (Могилев, с. ш. № 18),

Ивченко Н. (Киев, с. ш. № 145),
Июгин Б. (Тула, с. ш. № 73),
Краснов Е. (Новочебоксарск, с. ш. № 8),
Ращюс А. (Каунас, с. ш. № 8);

по 10 классам —
Вавилов М. (Свердловск, с. ш. № 2),
Добровольский С. (Днепропетровск, с. ш. № 13),
Кулешов М. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 17),
Марташвили Л. (Тбилиси, ФМШ № 42),
Усольцев К. (Владивосток, с. ш. № 23),
Чарушин А. (Актюбинск, с. ш. № 1),
Чулинин Ю. (Новосибирск, с. ш. № 10);

по 11 классам —
Кузьменко В. (Ивано-Франковск, с. ш. № 1),
Мартин И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Орловский А. (Киев, с. ш. № 145),
Резвов В. (Вологда, с. ш. № 29),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3).

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Базаров И. (Владивосток, с. ш. № 23),
Гуляев Н. (Горький, с. ш. № 82),
Линник В. (Новосибирская обл., Каргатская с. ш.),
Лобанов А. (Алма-Ата, РФМШ),
Овечкин В. (Петропавловск-Камчатский, с. ш. № 1),
Овсицер Б. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Писляков В. (Тверь, с. ш. № 6);

по 10 классам —
Бизяев А. (Киров, с. ш. № 35),
Денисов И. (Могилевская обл., Осиновская с. ш.),
Иванов М. (Тула, с. ш. № 73),
Коновалов И. (Кондопожский р-н, Сунская с. ш.),
Любый В. (Хуст, с. ш. № 4),
Пузыня П. (Гродно, с. ш. № 19),
Рязанцев А. (Свердловск, с. ш. № 19),
Тайманов С. (Раменское, с. ш. № 4),
Ульков В. (Тихвин, с. ш. № 8);

по 11 классам —
Борисенко О. (Киев, с. ш. № 145),
Гринчук А. (Брестская обл., Мохровская с. ш.),
Иванов В. (Тула, с. ш. № 73),
Соколинский И. (Москва, с. ш. № 47),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат),
Фридлянд А. (Саратов, с. ш. № 13),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Энтин М. (Тула, с. ш. № 73).

Призеры III Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили
Козлов Д. (Ленинград, с. ш. № 566, 11 кл.),
Зайцев Ю. (Киев, с. ш. № 57, 11 кл.),
Таборовец О. (Пинск, с. ш. № 4, 11 кл.),
Варблане Р. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 12 кл.),
Демаков А. (Кировская обл., Даровская с. ш., 11 кл.),
Еськов Г. (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.).

Дипломы II степени получили
Челышев А. (Чирчик, с. ш. № 24, 9 кл.),
Москаленко А. (Омск, с. ш. № 20, 11 кл.),
Натрошвили Л. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Кузьменко Т. (Киев, с. ш. № 51, 11 кл.),
Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Яценко Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 11 кл.),
Курбасов М. (Рязань, с. ш. № 2, 11 кл.),
Тарасов Ю. (Киров, с. ш. № 35, 11 кл.),
Докшицер Т. (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.),
Свинарев А. (Харьков, с. ш. № 106, 11 кл.),
Капиньш А. (Латвийская ССР, 11 кл.).

Дипломы III степени получили
Гурдюмов А. (Благовещенск, с. ш. № 1, 11 кл.),
Лепихин В. (Волгоград, с. ш. № 132, 10 кл.),
Ткачук К. (Ташкент, с. ш. № 243, 10 кл.),
Труц А. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 12 кл.),
Зильберфайн В. (Новосибирск, с. ш. № 166, 11 кл.),
Дуда Е. (Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.),
Зиновьев Н. (Москва, с. ш. № 843, 11 кл.),
Николаев М. (Брест, с. ш. № 3, 11 кл.),
Костюк А. (Воронеж, с. ш. № 1, 11 кл.),
Герштейн С. (Свердловск, интернат № 19, 10 кл.),
Уваров Д. (Новокузнецк, с. ш. № 11, 10 кл.),
Григорошвили С. (Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 11 кл.),
Быструев Д. (Москва, с. ш. № 47, 11 кл.),
Хаменя В. (Гродно, с. ш. № 1, 10 кл.).

Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Задачи третьего тура для 6—8 классов

6 класс

1. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Докажите, что у него не могла получиться сумма 1990.

2. Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по массе. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

3. Можно ли прямоугольник размером 55×39 разрезать на прямоугольники размером 5×11?

4. Волк и Заяц играют в следующую игру. На доске написано число, и ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру и написать получившееся число на месте старого. Ходят по очереди. Выигрывает тот, у кого получается ноль. Пусть на доске написано число 1234. Первым ходит Волк. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый решил 60 задач. Назовем задачу «трудной», если ее решил только один из мальчиков. Назовем задачу «легкой», если ее решили все трое. Докажите, что «трудных» задач больше, чем «легких» ровно на 20.

6. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. Среди знакомых каждой девочки мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живет не меньше, чем девочек. (6 и 7 класс)

7 класс

7. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого — по 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

8. 30 стульев стоят в ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если такие есть) встает и уходит. Какое максимальное число стульев может оказаться занятым, если сначала они все свободны?

9. На экране компьютера — число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя в любой момент может изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?

10. В четырехугольнике $ABCD$: $BC=AD$, M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку MN. (7 и 8 класс)

11. Квадрат 2×2 разрезан на прямоугольники. Докажите, что некоторые из них можно заштриховать так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну из сторон квадрата имела длину не меньше 1, а на другую — не больше 1.

12. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

8 класс

13. Дима купил в магазине тетрадь в 96 листов и пронумеровал по порядку все ее страницы числами от 1 до 192. Сережа вырвал из этой тетради 24 листа и сложил все написанные на этих листах 48 чисел. Могло ли у него получиться число 1990? (Сравните с задачей 1.)

14. Найдите все тройки натуральных чисел (A, B, C) такие, что

$$A^2+B-C=100,\ A+B^2-C=124.$$

15. В стране Далекой 101 город; города соединены дорогами с односторонним движением так, что любые два города соединены не более чем одной дорогой. Известно также, что из любого города выходит ровно 40 дорог и в любой город входит ровно 40 дорог. Докажите, что из каждого города в любой другой можно попасть, проехав не более чем по трем дорогам.

16. Среди 103 монет две монеты — фальшивые, отличающиеся по весу от настоящих. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково, равно как и обе фальшивые. За три взвешивания на двухчашечных весах без гирь определите, что тяжелее: настоящая монета или фальшивая?

17. На острове Логика каждый человек либо «лжец», всегда говорящий неправду, либо «рыцарь», всегда говорящий правду. Каждый островитянин произнес следующие две фразы:

а) все мои знакомые знакомы между собой;

б) среди моих знакомых лжецов не меньше, чем рыцарей.

Докажите, что на острове рыцарей не меньше, чем лжецов.

18. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n\leqslant 1000$ и

$$\frac{m}{n+1}<\sqrt{2}<\frac{m+1}{n}?$$

Избранные задачи заключительного тура для 9—11 классов

9 класс

19. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+ab+1 делится на b^2+ba+1. Докажите, что $a=b$.

20. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P, через A, B и P проведена окружность, пересекающая диагональ BD еще раз в точке Q. Через C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD еще раз в точке R. Докажите, что точки A, R и P лежат на одной прямой.

21. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, ..., N\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(N+1)!-1$. (Пример: $N=3$. Тогда $1^2+2^2+3^2+(1\cdot 3)^2=23=4!-1$.)

22. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо P человек, либо Q, где P и Q — взаимно просты. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

10 класс

23. На полке в беспорядке стоит 100-томное собрание сочинений Л. Н. Толстого. Разрешается взять любые два тома с номерами разной четности и поменять их местами. За какое минимальное число перестановок всегда можно расставить тома по порядку?

24. В отрезке $[0; 1]$ отмечены 22 точки. Разрешается заменять любые две из этих точек на середину соединяющего их отрезка. Докажите, что, выполнив 20 таких операций, можно добиться того, чтобы две оставшихся точки находились на расстоянии, не превышающем 0,001.

11 класс

25. У доски в клетку 100×100 склеили верхний край с нижним, а также правый с левым, после чего доска приобрела вид «бублика». Можно ли в ее клетках расставить 50 ладей — красных, синих и зеленых — так, чтобы каждая красная ладья «била» не менее двух синих, каждая синяя — не менее двух зеленых, и каждая зеленая — не менее двух красных?

26. Непрерывная функция $f:R\to R$ такова, что для любого действительного x выполняется равенство $f(x+f(x))=f(x)$. Докажите, что функция $f(x)$ постоянна.

Публикацию подготовили Н. Васильев, Д. Фомин

Информация

«Городок открытий и творчества»

(первый в стране детский научно-технический центр на ВДНХ СССР)

Раскрыть перед детьми «окно» в окружающий мир, пробудить в них интерес к научному поиску, стимулировать творческие способности ребят — такова цель создаваемого на ВДНХ СССР детского научно-технического центра под названием «Городок открытий и творчества» (сокращенно ГОТ). Его организаторы — Государственный комитет СССР по науке и технике и ВДНХ СССР.

В ноябре этого года намечено открыть в павильоне «Центральный» следующие разделы Городка: «Человек в реальном мире», «Удивительный мир физики и техники», «В мире персональных ЭВМ». Яркие и необычные по форме экспозиции разделов по самым неординарным, трудно объяснимым явлениям природы поведут ребят в глубь процессов и явлений, а открытый доступ к управлению экспонатами сделает зрителей участниками происходящих процессов.

Самым маленьким предложит свои услуги компьютерный игровой комплекс, где наряду с играми предусмотрено проведение абонементного обучения развитию памяти и логического мышления малышей. Французский игровой экспонат «Строительная площадка» поможет детям приобрести навыки коллективных действий. Весной 1991 года в составе Городка открытий и творчества откроется аэрокосмический комплекс, в котором посетители в форме игры будут готовиться и осуществят «полет в космос».

В рамках ГОТ намечено организовать лабораторию «Творят дети» по широкому спектру физико-технических направлений, проводить встречи школьников с ведущими учеными и специалистами, олимпиады, конкурсы, выставки самодеятельного творчества. Важнейшей задачей лаборатории станет выявление талантливых детей, проявивших себя в области физики и техники из других городов страны. Они будут приглашаться на стажировку в лабораторию Городка, где вместе со взрослыми будут работать над научными проблемами, искать практическое воплощение теоретических разработок.

Становление первого в стране детского научно-технического центра — дело нелегкое. При ГОТ создается Ассоциация научных работников, изобретателей и детей «Союз творцов», фонд научно-технических стажировок, финансируемый Академией наук СССР, ГКНТ СССР, Главкосмосом и др. организациями, но организаторы ГОТ ждут предложений о сотрудничестве, советов и рекомендаций от заинтересованных организаций и лиц, а также от самих ребят и их родителей. Свои предложения направляйте по адресу: 129223 Москва, проспект Мира, ВДНХ СССР, павильон «Центральный». Телефоны Городка открытий и творчества: 181-96-04, 181-98-12, 181-94-34.

Δm) должна превратиться в лед. Найдем ее из уравнения теплового баланса:

$$c_1 m_1(t_1-t)+\Delta m\lambda=c_2 m_2(t-t_2),$$

откуда

$$\Delta m=\frac{c_2 m_2(t-t_2)-c_1 m_1(t_1-t)}{\lambda}=0{,}17 \text{ кг}=17 \text{ г}.$$

Значит, наше предположение верное, и в калориметре содержится $m_1'=183$ г воды и $m_2'=317$ г льда.

11. Область видения изображена цветом на рисунке 3.

12. Получается 3 изображения (см. рис. 4).

13. См. рис. 5.

14. Изображение предмета получается полным, но только вдвое менее ярким.

15. См. рис. 6.

Всесоюзная олимпиада по информатике

Т 1.1. Обозначим вершины ломаной буквами M_i. Каждая вершина ломаной, кроме крайних, определяет угол разъединения этой вершины, в котором должен находиться вектор параллельного переноса одной из частей круга (это один из вертикальных углов, образованных продолжением соседних звеньев ломаной, пересекающихся в данной вершине). Существование вектора разъединения частей круга эквивалентно наличию общего угла разъединения для всех вершин ломаной.

Обозначим через $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (определяемый поворотом вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$ против часовой стрелки). Угол $\langle \vec{r_i}, \vec{s_i} \rangle$ разъединения вершины M_i можно найти, выбирая из двух углов $\langle \overrightarrow{M_iM_{i+1}}, \overrightarrow{M_iM_{i-1}} \rangle$ и $\langle -\overrightarrow{M_{i-1}M_i}, -\overrightarrow{M_{i+1}M_i} \rangle$ тот, который не превышает π. Затем необходимо выбрать из векторов $\vec{r_i}$ вектор $\vec{r}$, образующий с осью Ox наименьший угол, обозначим этот угол через α_r. Аналогично обозначим через $\vec{s}$ тот из векторов $\vec{s_i}$, который образует с осью Ox наибольший угол α_s. Если $\alpha_r \geqslant \alpha_s$, то любой вектор, угол α которого с осью Ox удовлетворяет условиям $\alpha_s \leqslant \alpha \leqslant \alpha_r$, является вектором разъединения частей круга.

Если $\alpha_r < \alpha_s$, то разъединить сдвигом части круга нельзя. Целочисленность координат вершин ломаной обеспечивает возможность точной проверки всех необходимых для реализации приведенного алгоритма условий, при этом значения координат по абсолютной величине должны быть небольшими.

Рассмотренный алгоритм определяет, можно ли выполнить разъединение параллельным переносом одной из частей круга. Попытки некоторых участников олимпиады исследовать возможность разъединения с поворотом членами жюри оценивалось особо, хотя таких попыток было очень мало.

Т 1.2. Для пункта в) возможно полное аналитическое решение. При этом надо рассмотреть три случая.

1) P и Q — взаимно простые числа разной четности. Можно показать, что тогда существует серия ходов, приводящая к результату (0, 1) (переводящая коня на соседнюю клетку). В этом случае достаточно одного коня.

2) P и Q — взаимно простые нечетные числа. Тогда каждый конь будет ходить по клеткам только одного цвета, но можно показать, что существует серия ходов с результатом (1, 1). Это означает, что достаточно двух коней.

3) P и Q не взаимно просты. Пусть $k=$ НОД (P, Q). Для контроля необходимо k^2 или $2k^2$ коней в зависимости от того, одинаковой или разной четности числа P/k и Q/k.

Для ограниченной (в одном или двух направлениях) доски при не взаимно простых P и Q задачу удается упростить. Например, для доски 10×14 при НОД $(P, Q)=3$ получаем

$$f(10, 14)=2f(4, 5)+f(4, 4)+4f(3, 5)+2f(3, 4).$$

Для взаимно простых P и Q на ограниченной доске размером больше $(2M+1)\times(2M+1)$, где $M=\max(P, Q)$, ответ совпадает с результатом для бесконечной доски (более точная оценка размера доски: $(2M+1)\times(P+Q+1)$ при $Q=1$ и нечетном P и $(2M+1)\times(P+Q)$ в остальных случаях). На досках меньшего размера результат можно получить перебором. Для полосы шириной L и взаимно простых P и Q результат тот же, что и для бесконечной доски при $L\geqslant 2M+1$ (более точная оценка: $P+Q+1$ при $Q=1$ и нечетном P и $P+Q$ в остальных случаях). При меньших значениях L ответ совпадает с ответом для конечной доски размером $L\times(2M+1)$.

Т 2. Знаменатели слагаемых суммы $S(N, a, b)$ медленно растут, это позволяет вычислять их без погрешностей в виде рациональных дробей (пар целых чисел). Использование стандартных функций для вычисления логарифма и целой части числа здесь нецелесообразно. Лучше накапливать знаменатель, домножая его текущее значение на величину a в тот момент, когда параметр $p=[\log_b k]$ изменяет свое значение. В свою очередь, значение p целесообразно накапливать, увеличивая его в тот момент, когда будет нарушено условие $k<b^{p+1}$. Накопление суммы $S(N, a, b)$ выполняется последовательно путем приведения дробей к общему знаменателю, сложения их и последующего сокращения. При преобразовании обыкновенной дроби в десятичную надо найти период десятичной дроби. Здесь целесообразно использовать следующий известный факт: для того, чтобы правильная несократимая обыкновенная дробь представлялась в виде чистой периодической дроби, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель не делился нацело ни на 2, ни на 5.

Жюри оценивало решение задачи по результатам тестирования. При этом учитывалось, к какой группе алгоритмов относится представленное решение. Наименьшим числом баллов оценивались «прямолинейные» алгоритмы, которые для вычисления суммы $S(N, a, b)$ использовали стандартные вычислительные средства языков программирования. Бóльшим количеством баллов оценивались «академические» алгоритмы, реализующие вычисления с высокой точностью и основанные на представлении чисел в виде массивов цифр их десятичных представлений. Максимально возможное число баллов получили участники, использовавшие «рациональные» алгоритмы, в которых вычисления проводились в рамках рациональной арифметики с последующим преобразованием результата в бесконечную десятичную периодическую дробь.

[redacted]чи Ленинградской городской олимпиады по математике

1. Сумма двух чисел, написанных на каждом листе, нечетна, поэтому, сложив все числа, написанные на 25 листах, мы получим нечетное число.

2. Положим на чашки весов по 50 монет. Если весы находятся в равновесии, то оставшаяся монета — фальшивая, и за следующее взвешивание мы определим, легче она настоящей или тяжелее. Пусть весы не находятся в равновесии. Снимем с них более тяжелую кучку из 50 монет, а оставшиеся разложим по 25 на каждую чашку. Если весы в равновесии, то среди монет нет фальшивой, значит, она среди более тяжелой кучки в 50 монет, т. е. фальшивая монета тяжелее настоящей. В противном случае фальшивая монета является более легкой.

3. Поскольку число 39 нельзя представить в виде суммы вида $5a+11b$, то сторона длиной 39 данного прямоугольника не может быть заполнена сторонами прямоугольников 5×11.

4. Выиграет Волк, если он все время будет вычитать из имеющегося на доске числа его последнюю цифру.

5. Пусть x — число «трудных» задач, y — число «легких», а z — число задач «средней трудности» (т. е. таких, которые решили двое мальчиков). Тогда $100=x+y+z$, а $180=x+2y+3z$. Из первого уравнения $200=2x+2y+2z$, откуда $x-z=20$.

6. Выберем из всех девочек нескольких (условившись называть их «звеньевыми») так, чтобы они не были знакомы друг с другом, но чтобы любая из девочек была знакома хотя бы с одной из звеньевых. Число всех девочек не превосходит суммарного числа знакомых девочек всех звеньевых, которое в свою очередь не превосходит суммарного числа всех мальчиков, знакомых со звеньевыми. А поскольку из условия следует, что каждый мальчик знаком не более чем с одной звеньевой, то это последнее число не больше чем число всех мальчиков.

7. Джон живет в квартире № 217. В самом деле, если a — номер его этажа, то номер его квартиры имеет вид $10(a-1)+b$, где $1\leqslant b\leqslant 10$. Поэтому $10(a-1)+b+a=11a+b-10=239$, значит, число $249-b$ делится на 11, а поскольку $1\leqslant b\leqslant 10$, то оно равно 242. Таким образом, $b=7$ и $a=22$.

8. 29. Ясно, что более 29 стульев занятыми быть не могут. Покажем, как занять 29 стульев. Если заняты k левых стульев ($k\leqslant 28$), то из двух новых гостей первый может сесть на стул с номером $k+2$, а затем встать, когда $(k+1)$-й стул займет второй. Таким образом, занят уже $k+1$ стул. Если $k+1\leqslant 28$, то рассуждение можно продолжить.

9. Федя может поступить следующим образом:

$$123\xrightarrow{+}225\xrightarrow{+}327\xrightarrow{+}429\xrightarrow{+}531\xrightarrow{}135\xrightarrow{+}237\xrightarrow{}327$$

и далее по циклу.

10. **Указание.** Докажите равенство треугольников ADP и BCP.

11. Возможны следующие случаи: а) высоты всех прямоугольников, примыкающих к нижней (верхней) стороне квадрата, не превосходят 1; б) один из прямоугольников, примыкающих к нижней (верхней) стороне квадрата, имеет высоту больше 1, а ширину — не превосходящую 1; в) и высота, и ширина одного из прямоугольников, примыкающего к нижней (верхней) стороне, больше 1.
Утверждение задачи следует из того, что в случаях а), б) оно очевидно, а случай в) для верхней и нижней сторон одновременно иметь место не может.

12. См. решение задачи М1230 из Задачника «Кванта».

13. Нет, не могло. Поскольку ясно, что сумма чисел, стоящих на одном листе, имеет остаток 3 при делении на 4, то сумма двадцати четырех таких чисел делится на 4 и не равна 1990.

14. $(a, b, c)=(12, 13, 57)$. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что $(b-a)(a+b-1)=24$.

15. Пусть A и B — два каких-то города. Предположим, что нет дороги $A\to B$, а также, что нет такого города C, для которого имеются дороги $A\to C$ и $C\to B$. Рассмотрим города $A_1, \ldots, A_{40}$, в которые ведут дороги из A, и другие 40 городов $B_1, \ldots, B_{40}$, из которых дороги ведут в B. Из городов A_i выходят $20\cdot 80$ дорог. Суммарное число дорог, соединяющих эти города, не превосходит $20\cdot 39$. Число дорог, ведущих из них в оставшиеся 19 городов, не более $20\cdot 38$. Поэтому найдется дорога $A_i\to B_j$.

16. Выделим три кучки по 34 монеты в каждой и сравним веса первой и второй, второй и третьей. Ясно, что все они равными быть не могут. Предположим, что при одном взвешивании, для определенности — первом, веса равны, а при другом — нет; опять-таки для определенности, пусть третий набор тяжелее. Тогда либо в первой и второй кучках все монеты настоящие, значит, фальшивая монета тяжелее настоящей, либо же в них имеется по одной фальшивой монете (а значит, она более легкая). Выяснить, имеется ли в них фальшивая монета, можно, сравнив веса двух половин (по 17 монет) первой кучки.

17. Задача сводится к задаче 6. Все знакомые каждого рыцаря знакомы между собой, а среди знакомых любого лжеца рыцарей больше, чем лжецов.

18. 1706. Рассмотрим лист бумаги в клетку, узлы которого — пары целых чисел (n, m) на плоскости Oxy, где $0\leqslant n, m\leqslant 1001$. Неравенства $m/(n+1)<\sqrt{2}<(m+1)/n$ выполнены в том и только в том случае, если прямая $y=\sqrt{2}x$ пересекает квадрат, левый нижний угол которого совпадает с узлом (n, m). Рассмотрим 1001 горизонтальную полосу $m\leqslant y\leqslant m+1$. Наша прямая будет пересекать два квадрата

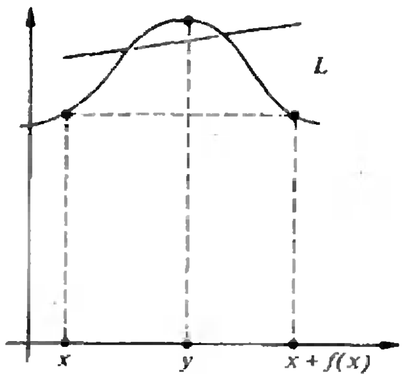


Рис. 7.

в полосе, если она пересекает один из единичных вертикальных отрезков в этой полосе. Поскольку $707 < \frac{1001}{\sqrt{2}} < 708$, то всего таких отрезков 707. Значит, в первых 1001 полосах прямая пересекает 1708 квадратов, из которых два первых нужно откинуть.

19. Из тождества $b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1)=b-a$ следует, что $a-b$ делится на b^2+ba+1, что, очевидно, возможно только при $a-b=0$.

20. Пусть R — точка пересечения AP и BD. Достаточно доказать, что она лежит на окружности, проходящей через точки C, P, Q, т. е. четырехугольник $CPRQ$ — вписанный. Углы BAR и RQP равны как опирающиеся на одну дугу исходной окружности, а углы BAR и BCR равны как симметричные относительно BD. Следовательно, $\angle RQP = \angle RCP$ и четырехугольник $CPRQ$ — вписанный.

21. Доказательство проводится индукцией по N. Разобьем множество всех данных в задаче наборов на два подмножества: наборы, содержащие число N, и наборы, не содержащие N. Сумма квадратов произведений в первом подмножестве равна (по предположению индукции) $N^2((N-1)!-1)+N^2$, а во втором подмножестве — $N!-1$. Складывая, получаем $(N+1)!-1$.

22. См. решение задачи М1232 из Задачника «Кванта».

23. 124 перестановки.

24. Указание. Пусть $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{21} < a_{22} \leqslant 1$ — данные 22 точки. Разобьем их на пары (a_1, a_2), ..., (a_{21}, a_{22}). Тогда из каждой пары можно выбрать по точке и проиумеровать их в некотором порядке $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$; соответствующие вторые точки пар обозначим $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$. Выполняя операции «слияния точек», мы можем получить точки $A = \frac{1}{1024}(x_1+x_2+2x_3+\ldots+1024x_{11})$ и $B = \frac{1}{1024}(y_1+y_2+2y_3+\ldots+1024y_{11})$. Докажите, что выбор точек x_k и их нумерацию можно подобрать так, чтобы расстояние между точками A и B было не более $1/1024$.

25. Нет, нельзя. Указание. Обозначим через A, B и C количество красных, синих и зеленых ладей, а через x, y, z — количество пар бьющих друг друга ладей красного и синего, синего и зеленого, зеленого и красного цветов соответственно. Тогда из требований задачи вытекают неравенства

$$2A \leqslant x \leqslant 2B \leqslant y \leqslant 2C \leqslant z \leqslant 2A.$$

Следовательно, имеем $A=B=C$, и, значит, общее количество ладей должно делиться на 3.

26. Если предположить, что данная функция не постоянна, то найдутся действительные числа x и y, такие, что $f(x) < f(y)$ и при этом точка y находится между x и $x+f(x)$ (см. рис. 7). Тогда, очевидно, существует прямая L, задаваемая уравнением $x+ny=c$ (n — натуральное), отделяющая точку $(y; f(y))$ от точек $(x; f(x))$, $(x+f(x); f(x+f(x))=f(x))$. По теореме о промежуточном значении, существуют две различные точки A и B с различными абсциссами a и b соответственно, лежащие одновременно и на прямой L, и на графике f. Но так как следствием соотношения $f(x+f(x))=f(x)$ является соотношение $f(x+nf(x))=f(x)$, то получаем $f(c)=f(a+nf(a))=f(a)$, и, аналогично, $f(c)=f(b)$. Итак, $f(a)=f(b)$, а также $a+nf(a)=b+nf(b)$, откуда заключаем, что $a=b$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

«[redacted]ант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Очевидно, что искомое число $p \neq 1$ может иметь только вид $p=3k$ (если $p=3k+1$, то число $p+2=3k+3$ — составное, если $p=3k+2$, то число $p+4=3k+6$ — составное). Значит, p может быть равно только 3. Легко убедиться, что $p=3$ действительно нужное.

2. Нужно включить один выключатель, подождать некоторое время, затем его выключить и включить второй, после этого пойти в комнату с лампочками. Горящая лампочка связана со вторым выключателем, а из потушенных горячая связана с первым, а холодная — с третьим выключателем.

3. Первое число равно 2345, так как если оно больше, то сумма трех чисел больше чем 12 300, если меньше, то сумма меньше чем 12 300. Отсюда второе число равно 5432, а третье — 4523.

4. Заметим, что при параллельном переносе маленького квадрата сумма площадей как красных, так и синих четырехугольников не меняется, а для квадратов, центры которых совпадают, утверждение очевидно.

5. Пусть уплачено x рублей, а получено y рублей, тогда $y-x=m$. Во второй раз было куплено товара в y/x раз больше, чем в первый, поэтому за него во второй раз было получено во столько же раз больше, чем в первый, т. е. было получено y^2/x рублей. Значит $y^2/x-y=n$. Из этих уравнений получаем, что $x=\frac{m^2}{n-m}$.

Шахматная страничка

ЭКС-ЧЕМПИОН ПРОТИВ КОМПЬЮТЕРОВ

В «Кванте» № 3 за этот год рассказывалось об увлекательном матче между двумя чемпионами мира — Г. Каспаровым и «Дип сот», закончившемся победой человека со счетом 2:0. После этого поражения электронный чемпион был усовершенствован и на равных сразился с несколькими гроссмейстерами. Это навело его на мысль бросить вызов А. Карпову — в надежде взять у экс-чемпиона мира реванш за поражение от чемпиона. Карпов вылетел в Нью-Йорк и провел с «Дип сот» одну встречу с укороченным контролем (1 час на всю партию), кстати, более выгодным машине, для которой время имеет меньшее значение, чем для человека.

В дебюте и в миттельшпиле компьютер действовал уверенно и сохранял равновесие. Однако в эндшпиле электронный гроссмейстер растерялся, и Карпов, отдав пешку, перехитрил его. Как видно, машине еще есть чему поучиться у человека.

А. Карпов — «Дип сот»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. Kd2. Если последует размен на e4, то разницы между выпадами коня на c3 и d2 нет. Идея хода 3. Kd2 заключается в том, что в случае 3...g6 белые смогут поддержать центральную пешку ходом c2—c3. И все же «Дип сот», не обращая внимания на эти теоретические нюансы, избирает вариант с фианкеттированием слона.

3...g6 4. c3 Cg7 5. e5. При укрепленном центре белые могли спокойно закончить развитие фигур. Вместо этого они фиксируют свою пешечную цепь, и компьютер немедленно атакует ее по всем правилам подобных построений.

5...f6! 6. f4 Kh6 7. Kgf3 0—0 8. Ce2 fe 9. fe c5! 10. Kb3 cd 11. cd Kc6 12. 0—0 Фb6 13. Kph1 a5! 14. a4. Заслуживало внимания сразу 14. Kc5 с идеей Ka4 и Kc3.

14...Cf5 15. Cg5. Делая этот ход, белые, наверное, уже имели в виду жертву пешки b2, иначе они сразу бы сыграли 15. Kc5. **15...Ce4 16. Kc5 Ф:b2.** Рискованное решение. В духе позиции 16...Kf5, жертвуя качество, но успешно завершая осаду центра: 17. Kd7 Ф:b2 18. K:f8 Kf:d4 с контригрой.

17. K:e4 de 18. Лb1 Фa3! Единственный ход! 18...Фc3 ведет к потере ферзя — 19. Лb3, на 18...Фa2 сильно 19. Kd2!

19. Cc1 Фc3 20. Cd2 Фa3 21. Cc1 Фc3. Да, ничью повторением ходов белые имеют. Такой результат устраивает машину, но не Карпова. Экс-чемпион стремится запутать электронного партнера, но до глубокого эндшпиля тот действует весьма точно.

22. Лb3! Фa1 23. Cc4+ Kph8 24. C:h6 Ф:d1 25. C:g7+ Kp:g7 26. Л:d1 ef 27. gf. Возможно, стоило взять пешку b7, но следующий ход машины, защищающий ее, трудно предугадать даже гроссмейстеру. **27...Лa7! 28. Cd5 Лd8 29. Лb5 Лa6!** Оказывается, маневры ладьи по линии «а» не так уж нелепы: грозит 30...Ka7 31. C:b7 K:b5 32. C:a6 Л:d4 с полным уравниванием. Ничего не дает белым 30. Ce4 Л:d4 31. Л:d4 K:d4 32. Л:b7 Лe6, и на доске битая ничья.

30. Cc4 Лa7 31. Cd5 Лa6 32. Лc5 Лd7 33. Kpg2 Лb6. Хитроумная ладья умудряется даже проявить активность. **34. C:c6.** Не обидно ли менять слона на коня? Лучше было сразу подтянуть короля к центру. **34...bc 35. Kpf2.** После 35. Л:a5 Лb4 шансы белых на успех были бы равны нулю. **35...Лd5! 36. Л:d5 cd 37. Лc1 Лb4 38. Kpe3 Л:a4.** Проще всего вело к ничьей 38...Лb3+ 39. Kpe2 Лb4, но компьютер не упускает случая прихватить пешку.

39. Лc5 e6 40. Лc7+ Kpg8 41. Лe7 Лa3+ 42. Kpf4 Лd3 43. Л:e6 Л:d4+ 44. Kpg5 Kpf7 45. Лa6 a4? Странно, что «Дип сот» не замечает форсированный ничейный вариант: 45...h6+ 46. Kp:h6 Лh4+ 47. Kpg5 Лh5+ 48. Kpf4 Лf5+ и 49...Л:e5.

46. f4 h6+ 47. Kpg4 Лc4? Решающая ошибка. Последний шанс добиться ничьей состоял в 47...g5! Ладейный эндшпиль машина проводит ниже всякой критики.

48. h4 Лd4 49. Лf6+ Kpg7 50. Лa6 Kpf7 51. h5! gh+. И здесь необходимо было 51...g5, правда, после 52. Л:h6 Л:f4+ 53. Kp:g5 окончание, кажется, уже не спасти. В любом случае человеку не пришло бы в голову организовывать противнику пару связанных проходных...

52. Kpf5 Kpg7 53. Лa7+ Kpf8 54. e6 Лe4 55. Лd7 Лc4 56. Л:d5 h4 57. Лd3 Kpe7 58. Лd7+ Kpf8 59. Лh7 h5 60. Kpe5 h3 61. f5 Kpg8 62. Л:h5 a3 63. Л:h3 a2 64. Лa3 Лc5+ 65. Kpf6. Черные сдались.

Итак, встреча с чемпионом мира среди больших, сверхмощных машин завершилась для А. Карпова успешно. Но вскоре его ждало новое испытание — игра с шестикратным чемпионом мира среди специализированных шахматных микрокомпьютеров — знаменитым роботом «Мефисто». Об этом мы расскажем в следующем номере.

Е. Гик